Langages stratégiques de mots infinis

M. Arfi, B. Ould M Lemine et C. Selmi

LITIS, EA 4018, Université de Rouen

JORCAD'08, 17 septembre 2008

Problèmatique et motivations

Problèmatique

- Modélisation par les mots infinis des jeux infiniment répétés
- Description combinatoire des notions de stratégie et d'équilibre de Nash.

Motivations

- La théorie des jeux constitue une approche mathématique des problèmes de stratégie.
- Problèmes stratégiques en informatique
- Utilisation des méthodes de la théorie des langages pour étudier ces jeux .

Jeux infiniment répétés

Le jeu G^ω

- Un jeu infiniment répété G^ω, est un jeu global dans lequel un même jeu de base G est joué un nombre infini de fois.
- Entre chaque tour de G^ω, les joueurs apprennent la partie qui a été jouée au tour précédent.
  Nous dirons que le jeu G^ω est à information parfaite.
- La répétition infinie d'un jeu permet une modélisation plus proche du comportement réel des joueurs.

Le jeu de base G

Le jeu de base G est supposé :

- simultané, les joueurs jouent au même temps.
- à information complète, chaque joueur connaît avec exactitude les comportements possibles des autres participants.
- non coopératif, chaque joueur veut maximiser son gain sans se concerter avec son adversaire

Le dilemme du prisonnier

Ce jeu à deux joueurs est donné par sa matrice des gains

π	c	d
c	(4,4)	(0, 5)
d	(5,0)	(1, 1)

Les règles du jeu

- Les joueurs choisissent simultanéement une action dans l'ensemble $A = \{c, d\}$.
- Les gains associés à chaque partie sont donnés par la matrice des gains.
- La matrice des gains est connue par les joueurs.

Que faire ?

π	c	d
c	(4,4)	(0, 5)
d	(5,0)	(1, 1)

Que faire ?

- La meilleure action pour chacun des deux joueur est d.
- Si les deux joueurs pouvaient se concerter, ce serait c.
- La répétition infinie d'un jeu non coopératif, permet aux joueurs une forme d'interaction.
- Chaque joueur peut construire sa stratégie en fonction de l'historique.

Un modèle mathématique pour les jeux

Le modèle mathématique

$G = (P, A, \pi)$:

- $P = \{1, \cdots, n\}$, $n \in N$, l'ensemble des joueurs .
- A_i, l'ensemble des actions du joueur i.
- $A = A_1 \times \ldots \times A_n$, l'alphabet de coups .
- $\pi_i : A \to R$., la fonction de paiement pour le joueur i.
- $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_n) : A \to R^n$,le vecteur de paiement.

Les mots infinis

- Dans G^ω, une partie h est une suite infinie de coups :

$$h = h_0 h_1 \cdots h_t \cdots \in A^\omega.$$

- Dans le dilemme du prisonnier :
  - $P = \{1, 2\}$, $A_1 = A_2 = \{c, d\}$, $A = \{c, d\} \times \{c, d\}$
  - la matrice des gains représente les paiements.
  - $h = (c, c)^\omega$ est une partie où les deux joueurs coopérent toujours.

Stratégies

Stratégies

- Une {quasi} stratégie {pure}, σ_i pour le joueur i, est une relation
$$\sigma_i : A^* \longrightarrow A_i,$$
qui décrit le comportement du joueur i.
- Le comportement de tous les joueurs est décrit par un vecteur de stratégies
$$\sigma = (\sigma_1, \cdot\cdot, \sigma_n).$$

Exemples de stratégies

Un jeu solitaire

$G = (P, A, \pi)$:

- $P = \{1\}$, un seul joueur.
- $A = \{a, b\}$, ensemble des actions du joueur coïncide avec l'alphabet de coups.
- Stratégie moinsdea :

$$\sigma_{\leq a}(w) = \begin{cases} \{a, b\} & si \ \mid w \mid_a < \mid w \mid_b \\ b & sinon \end{cases}$$

Exemples de stratégies

Dans le dilemme du prisonnier

- Stratégie rancunière pour le joueur 1 :

$$\sigma_1(w) = \begin{cases} c & si\ w \in (c,c)* \\ d & si\ w \in (c,c)^*(c,d) \\ \phi & sinon \end{cases}$$

- Stratégie imprévisible pour le jouer 2 :

$$\varphi_2(w) = \Big\{ \{c,d\}\ \forall w \in A^*$$

Langages

Langage associé à une stratégie

- Σ est l'ensemble de tous les vecteurs de stratégies sur A.
- Considérons l'application $\gamma : \Sigma \longrightarrow \mathcal{P}(A^\omega)$ définie par :

$$\gamma(\sigma) = \{h \in A^\omega \mid h_0 \in \sigma(\epsilon) \text{ et } h_{t+1} \in \sigma(h_0 ... h_t), \forall t \geq 0\}$$

- L est un langage stratégique ssi

$$\exists \sigma \in \Sigma \text{ tels que } L = \gamma(\sigma).$$

- L'ensemble des stratégies qui engendrent L est noté $S(L)$.

Exemples de langages engendrés pas des stratégies

Dans le jeu solitaire

- $\sigma_{\leq a}$ = moinsdea.
- Le langage engendré par $\sigma_{\leq a}$ est :
  $\gamma(\sigma_{\leq a}) = \{h \in A^{\omega} \mid Pref(h) \in \{w \in A^{*} \mid |w|_a \leq |w|_b\}\}$

Dans le dilemme du prisonnier

- σ_1 = rancunière pour le joueur 1 :
- φ_2 = imprévisible pour le jouer 2 :
- Le langage engendré par $\sigma = (\sigma_1, \varphi_2)$ est :
  $\gamma(\sigma) = (c, c)^{\omega} + (c, c)^{*}(c, d)((d, c) + (d, d))^{\omega}$.

Un langage, plusieurs stratégies

Le langage

$$L = (c,c)^\omega + (c,c)^*(c,d)((d,c),(d,d))^\omega$$

est aussi engendré par la stratégie : $\sigma' = (sigma_1{}', \varphi_2)$ où :

$$\sigma_1{}'(w) = \begin{cases} c & si\ w \in (c,c)* \\ d & si\ w \in (c,c)^*(c,d) \\ c & sinon \end{cases}$$

L'application γ n'est ni injective ni surjective pour $\mid A \mid > 1$.

Un ordre pour les stratégies

Une relation d'ordre

Nous définissons sur Σ la relation d'ordre suivante :

$$\sigma \leq \sigma\prime \;\Leftrightarrow\; \sigma(w) \subset \sigma\prime(w), w \in A^*.$$

Ses propriétés

Pour toute famille de stratégies $(\sigma_i)_{i \in I}$ de Σ, nous avons :

- $\bigcap_{i \in I} \sigma_i \in \Sigma$
- $\bigcap_{i \in I} \sigma_i \leq \sigma_j; \forall j \in I$

Stratégie minimale

Parmi toutes les stratégies qui engendrent un langage strat égique L, nous considérons la stratégie particulière σ_L :

$$\sigma_L = \bigcap_{\sigma \in S(L)} \sigma$$

- Si L est stratégique alors $L = \gamma(\sigma_L)$.
- σ_L est la stratégie minimale pour L.

La stratégie des préfixes

- Pour tout langage $L \subset A^\omega$, considérons la stratégie suivante :

$$\begin{array}{rccc} \hat{\sigma}_L : & A^* & \longrightarrow & A \\ & w & \longmapsto & Pref_1(w^{-1}L). \end{array}$$

- Pour tout langage $L \subset A^\omega$, nous avons

$$L \subset \gamma(\hat{\sigma}_L).$$

Un exemple de stratégie des préfixes

- $L = ab^\omega$.
- La stratégie des préfixes pour L est :

$$\hat{\sigma}_L(w) = \begin{cases} \{a, b\} & si\ w \in a* \\ b & si\ w \in a^*b^+ \\ \emptyset & sinon \end{cases}$$

- Le langage engendré est $\gamma(\hat{\sigma}_L) = a^*b^\omega + a^\omega$.
- $L \subset \gamma(\hat{\sigma}_L)$.

Stratégie minimale et stratégie des préfixes

- La stratégie

$$\hat{\sigma}_L(w) = \begin{cases} \{a, b\} & si\ w \in a* \\ b & si\ w \in a^*b \\ \emptyset & sinon \end{cases}$$

  est aussi la stratégie minimale pour L.
- Le langage $L = ab^\omega$ n'est pas stratégique car il n'est pas engendré par sa stratégie minimale.

Caractérisation des langages stratégiques

Le point de vue topologique

$L \subset A^{\omega}$ est stratégique ssi L est fermé.

Une description pour la stratégie minimale

Pour L stratégique

$$\hat{\sigma}_L = \sigma_L.$$

Le point de vue fonctionnel

$L \subset A^{\omega}$ est stratégique ssi L est engendré par la stratégie des préfixes.

Equilibres de Nash

L'idée de base

Intuitivement, un vecteur de stratégies

$$\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$$

est un équilibre de Nash
si aucun des joueurs ne peut obtenir un meilleur gain en changeant de manière unilatérale sa stratégie.

Equilibres de Nash : le cas des jeux statiques

Le dilemme du prisonnier

π	c	d
c	(4, 4)	(0, 5)
d	(5,0)	(1, 1)

Le vecteur (d, d) est un équilibre de Nash :

- Le gain associé est $\pi(d, d) = (1, 1)$.
- Si le joueur 1 change de stratégie en joueant c alors que le joueur 2 continue à jouer d, le gain associé est $\pi(c, d) = (0, 5)$.

Equilibres de Nash : le cas des jeux répétés

Paiement d'une partie

L'évaluation d'une partie

$$h = h_0 h_1 \cdots h_t \cdots \in A^\omega$$

d'un jeu infiniment répété G^ω, pour un joueur i, est définie par :

$$\pi_i^\delta(h) = (1 - \delta) \sum_{k=0}^{\infty} \pi_i(h_k)\delta^k .$$

où $0 < \delta < 1$ est le facteur d'actualisation.

Equilibres de Nash : le cas des jeux répetés

Le facteur d'actualisation

- Les joueurs actualisent leurs gains futurs, en applicant, un taux d'actualisation $0 < \delta < 1$.
- Un gain $\pi_i(h_1)$ obtenu à la periode 1 équivaut à un gain $\pi_i(h_1)\delta$ obtenu à la periode 0.
- $(1 - \delta)$ est un facteur d'uniformisation.
- Le gain du joueur 1, dans le dilemme du prisonnier infiniment répété, pour la partie $h = (c, c)^\omega$ est :

$$\pi_i^\delta(h) = (1 - \delta)\sum_{k=0}^{\infty} 4\delta^k = 4(1 - \delta)\sum_{k=0}^{\infty} \delta^k = 4$$

Le vocabulaire

Variations

- Une *i-variation d'un coup* $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_i, \cdots, \alpha_n)$ est un coup $\beta = (\beta_1, \cdots, \beta_i, \cdots, \beta_n) \in A$:

$$\alpha_i \neq \beta_i \text{ et } \alpha_j = \beta_j, \forall j \neq i.$$

- Une *i-variation d'une partie* $h = h_0 h_1 \cdots h_t \cdots \in L \subset A^\omega$ est une partie $\overline{h} \in L$:

$$\overline{h} = h_0 \ldots h_{t-1} \alpha w \in L.$$

pour $t \geq 0$, α i-variation de h_t et $w \in A^\omega$.

Le vocabulaire

Bonnes parties

- Une bonne partie pour i dans L est une partie $h \in L$:
$$\pi_i(h) \geq \pi_i(\overline{h}) \text{ pour toute } i\text{-variation } \overline{h} \text{ de } h.$$
- $BP_i(L)$ est l'ensemble des bonnes parties pour i dans L.

Un exemple

- $L = (c,c)^\omega + (d,d)^\omega$. Les mots $(c,c)^\omega$ et $(d,d)^\omega$ n'ont pas de i-variation dans L. Nous avons :

$$BP_i(L) = L, \ \forall i = 1, 2.$$

Un deuxième

- $L = (d,d)^\omega + (d,d)^*(d,c)((c,c) + (c,d))^\omega$. Nous avons :

$$h = (d,c)(c,d)^\omega \in BP_2(L) \text{ si } \delta > 1/5.$$

Equilibre de Nash d'un jeu à deux joueurs

- $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$.
- $L_1 = \gamma(\sigma_1, \varphi_2),\ L_2 = \gamma(\varphi_1, \sigma_2)$
  φ_i est la stratégie imprévisible pour le joueur i.
- $$BP_i(L_j)$$
  Ensemble des bonnes parties pour le joueur i dans l'ensemble des parties L_j que le joueur j peut jouer en suivant sa stratégie.

Définition d'équilibre de Nash

Un vecteur de stratégies $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$ est un *équilibre de Nash* ssi

$$BP_1(L_2) \bigcap BP_2(L_1) \neq \emptyset.$$

Un vecteur de stratégies est unéquilibre de Nash s'il existe une partie *h* qui est une bonne partie pour chaque joueur dans l'ensemble des parties que son adversaire peut jouer en suivant sa stratégie.

Un exemple dans le dilemme du prisonnier

Considérons le vecteur $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$ où chaque joueur joue la stratégie rancuniére

$$\begin{aligned} X_1 &= (c,c)^\omega + (c,c)^*(c,d)((c,c),(d,d))^\omega, \\ X_2 &= (c,c)^\omega + (c,c)^*(d,c)((c,d),(d,d))^\omega. \end{aligned}$$

Nous pouvons montrer que (σ_1, σ_2) est un équilibre de Nash ssi le facteur d'actualisation $\delta \geq 1/4$.