

Quelques constructions sur les pavages auto-assemblants

Eric Rémila

Université de Lyon

LIP (umr 5668 CNRS-Université Lyon 1-ENS Lyon)

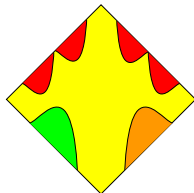
IXXI (Institut des Systèmes Complexes - Complex System Institute)

Université de St-Etienne (IUT Roanne)

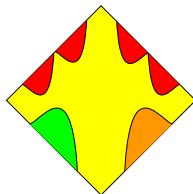
Travail réalisé avec **Florent Becker** (LIP, université de Lyon) et **Nicolas Schabanel** (CMM CNRS), en grande partie au Chili grâce au soutien du programme Ecos

18 septembre 2008

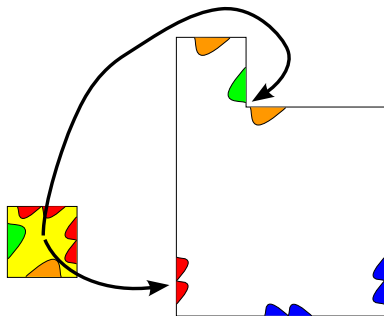
- Un ensemble de tuiles de Wang.



- Un ensemble de tuiles de Wang.
- Avec des colles de différentes forces.

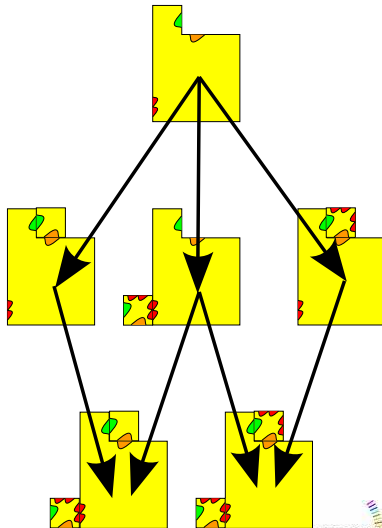


- Un ensemble de tuiles de Wang.
- Avec des colles de différentes forces.
- La somme des liens doit dépasser la *température*

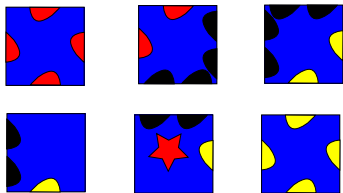


Exemple à $T = 2$

- Comment décrire le déroulement de l'assemblage, en tenant compte du parallélisme et du non-déterminisme
- Ordre partiel des *productions*
- Langage engendré par le jeu de tuiles : productions finales

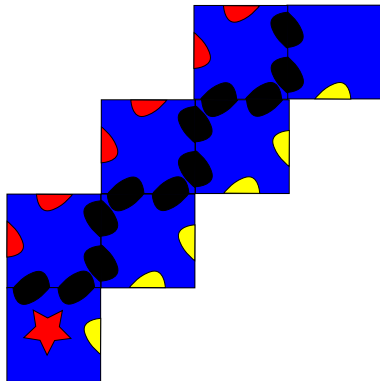


Un exemple d'assemblage



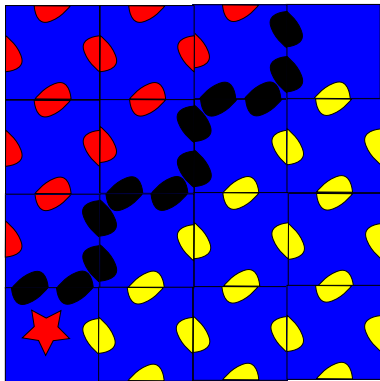
Que peut on former avec ce jeu de tuiles, à température 2 ?

Un exemple d'assemblage

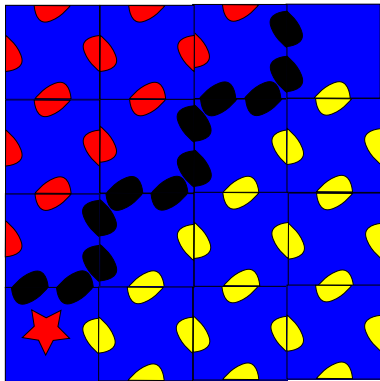


Avec les colles de force 2,
création d'un diagonale.

Un exemple d'assemblage

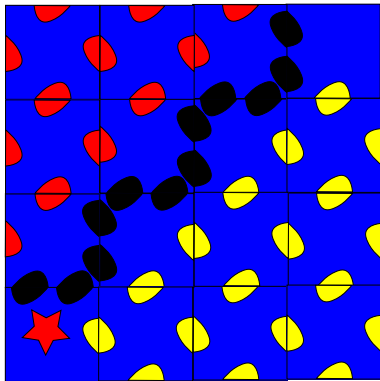


Complétion.



Conclusion : le jeu de tuiles donné

- permet de former tous les carrés (de taille ≥ 2),.



Conclusion : le jeu de tuiles donné

- permet de former tous les carrés (de taille ≥ 2),
- ne permet de former que des carrés (effet bicolore).

- Croissance de cristaux.
- Auto-assemblage d'ADN, Croissance de tissus ?
- Ordinateur biologique.
- Auto-assemblage "industriel" .

- la dynamique est égale à la statique (i. e. toute configuration stable contenant la racine est une production).

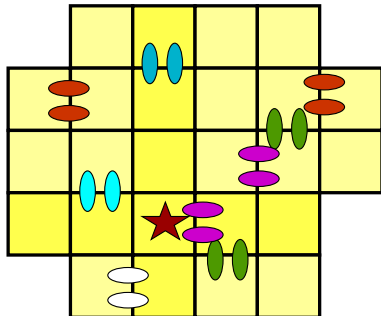
- la dynamique est égale à la statique (i. e. toute configuration stable contenant la racine est une production).
- Il existe des jeux de tuiles apériodiques (qui pavent le plan, mais où aucun pavage du plan n'est périodique) . Record : 13 tuiles (Kari 94)

- la dynamique est égale à la statique (i. e. toute configuration stable contenant la racine est une production).
- Il existe des jeux de tuiles apériodiques (qui pavent le plan, mais où aucun pavage du plan n'est périodique) . Record : 13 tuiles (Kari 94)
- Savoir si un jeu de tuiles donné pave le plan est indécidable (Berger 62)

- la dynamique est égale à la statique (i. e. toute configuration stable contenant la racine est une production).
- Il existe des jeux de tuiles apériodiques (qui pavent le plan, mais où aucun pavage du plan n'est périodique) . Record : 13 tuiles (Kari 94)
- Savoir si un jeu de tuiles donné pave le plan est indécidable (Berger 62)
- Si un jeu de tuiles pave le plan, alors il existe un pavage quasipériodique (Allauzen Durand 95).

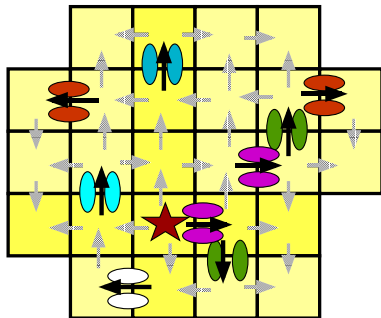
On passe à $T = 2$.

- On suppose que, pour toute production, une seule colle de force 2 entre deux lignes (colonnes) consécutives.



On passe à $T = 2$.

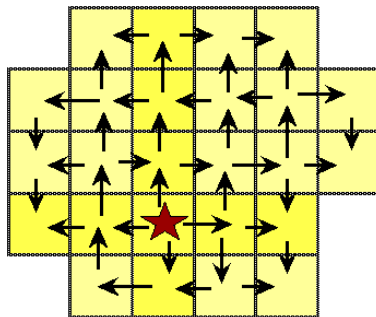
- On suppose que, pour toute production, une seule colle de force 2 entre deux lignes (colonnes) consécutives.
- On peut donc rajouter des flèches indiquant l'ordre de construction.



La condition RC est le moyen classique de contrôler la dynamique.

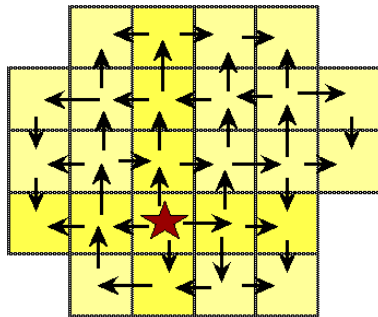
La condition d'ordre

- Pour toute production, l'ordre de pose de deux tuiles voisines est indépendant de la dérivation choisie pour arriver à la production.



La condition d'ordre

- Pour toute production, l'ordre de pose de deux tuiles voisines est indépendant de la dérivation choisie pour arriver à la production.
- Il y a un ordre (partiel, mais comparant toutes les positions voisines) intrinsèque à la production.



Le modèle Markovien (temps continu)

Pour chaque tuile t , une concentration k_t .

La chaîne de Markov associée :

- Etats : productions,

Cette chaîne modélise la réalité d'agrégations successives, à partir de la racine, dans une soupe avec de faibles concentrations.

Le modèle Markovien (temps continu)

Pour chaque tuile t , une concentration k_t .

La chaîne de Markov associée :

- Etats : productions,
- Transitions : ajouts de tuile,

Cette chaîne modélise la réalité d'agréations successives, à partir de la racine, dans une soupe avec de faibles concentrations.

Le modèle Markovien (temps continu)

Pour chaque tuile t , une concentration k_t .

La chaîne de Markov associée :

- Etats : productions,
- Transitions : ajouts de tuile,
- Temps de transition : quand on ajoute t , il suit une loi de probabilité exponentielle de paramètre k_t . (donc le temps moyen de transition est $1/k_t$).

Cette chaîne modélise la réalité d'agrégations successives, à partir de la racine, dans une soupe avec de faibles concentrations.

Le modèle Markovien (temps continu)

Pour chaque tuile t , une concentration k_t .

La chaîne de Markov associée :

- Etats : productions,
- Transitions : ajouts de tuile,
- Temps de transition : quand on ajoute t , il suit une loi de probabilité exponentielle de paramètre k_t . (donc le temps moyen de transition est $1/k_t$).
- Le temps de construction d'une production P : le temps moyen pour arriver à P (sachant qu'on y arrive)

Cette chaîne modélise la réalité d'agrégations successives, à partir de la racine, dans une soupe avec de faibles concentrations.

Le modèle parallèle (temps discret)

- On part de la racine (et on vise une production fixée P)

Le modèle parallèle (temps discret)

- On part de la racine (et on vise une production fixée P)
- A chaque étape, on ajoute toutes les tuiles de P possibles.

Le modèle parallèle (temps discret)

- On part de la racine (et on vise une production fixée P)
- A chaque étape, on ajoute toutes les tuiles de P possibles.
- Temps de construction parallèle : nombre d'étapes parallèles pour arriver à P

Le modèle parallèle (temps discret)

- On part de la racine (et on vise une production fixée P)
- A chaque étape, on ajoute toutes les tuiles de P possibles.
- Temps de construction parallèle : nombre d'étapes parallèles pour arriver à P
- Remarque : sous la condition d'ordre

temps parallèle = plus longue chaîne de l'ordre sur P

Le modèle parallèle (temps discret)

- On part de la racine (et on vise une production fixée P)
- A chaque étape, on ajoute toutes les tuiles de P possibles.
- Temps de construction parallèle : nombre d'étapes parallèles pour arriver à P
- Remarque : sous la condition d'ordre

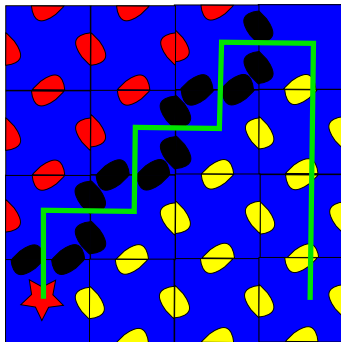
temps parallèle = plus longue chaîne de l'ordre sur P

- Théorème : avec la condition d'ordre :

temps parallèle = temps continu

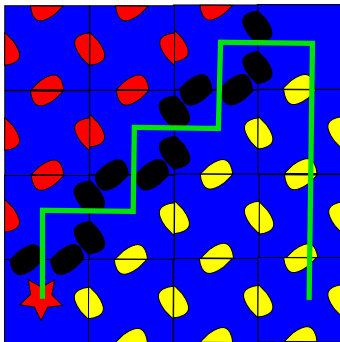
à une constante près, qui ne dépend que des concentrations.
On va donc étudier le temps parallèle (c'est plus simple).

Le temps sur notre exemple



- Le temps de construction du carré $n \times n$ est égal à $3n$.
- Peut on avoir un jeu de tuiles qui va plus vite ?

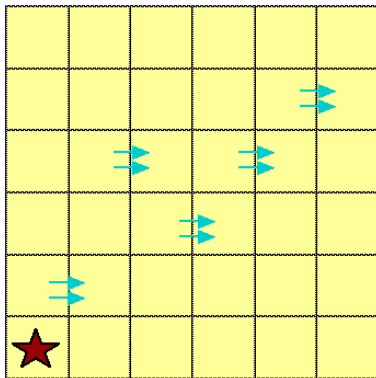
Le temps sur notre exemple



- Le temps de construction du carré $n \times n$ est égal à $3n$.
- Peut on avoir un jeu de tuiles qui va plus vite ?
- En particulier, existe-t'il un jeu de tuiles qui réalise le temps optimum $2n$?

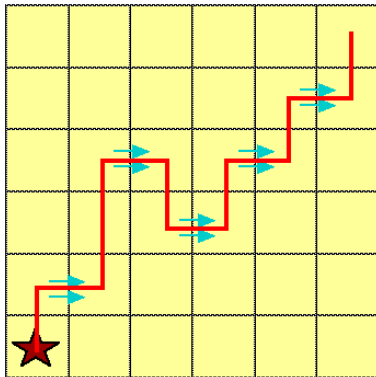
Contraintes pour un jeu de tuiles en temps réel (I)

Cette configuration des forces 2 horizontales est-elle possible ?



Contraintes pour un jeu de tuiles en temps réel (I)

Cette configuration des forces 2 horizontales est-elle possible ?

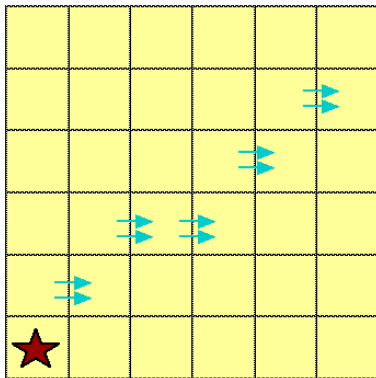


NON : il y a un chaîne trop longue.

Conclusion : les positions des forces 2 doivent être croissantes

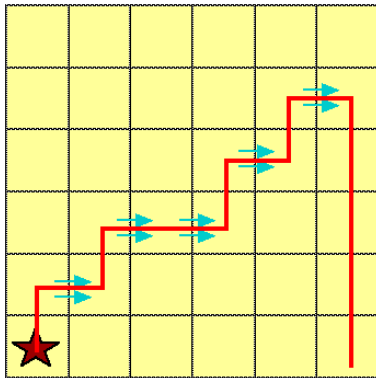
Contraintes pour un jeu de tuiles en temps réel (II)

Cette configuration des forces 2 horizontales est-elle possible ?



Contraintes pour un jeu de tuiles en temps réel (II)

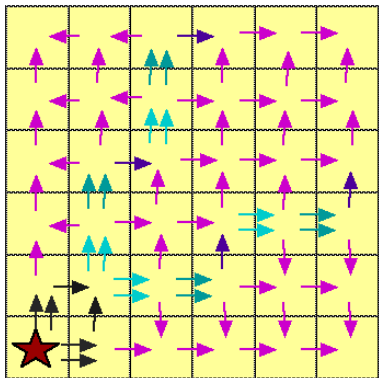
Cette configuration des forces 2 horizontales est-elle possible ?



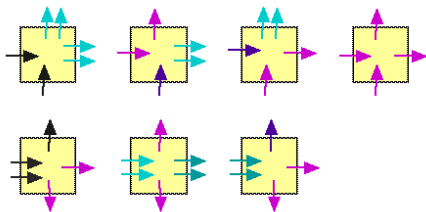
NON : il y a un chaîne trop longue.

Conclusion : les positions des forces 2 doivent être dans le demi-carré inférieur.

Une amélioration : le déterminisme local

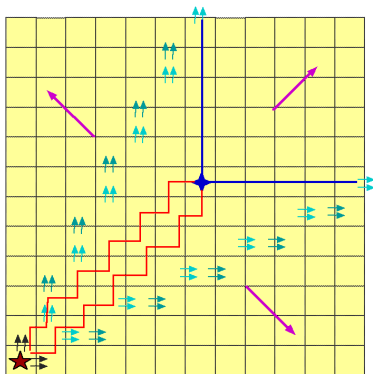


Idée : ajouter des couleurs afin que les flèches d'entrée imposent le choix de la tuile à poser.



Les tuiles se posent aux bon endroits.
Que manque t'il donc pour que ça marche ?

Comment arrêter le processus ?



Marquer la diagonale, introduire une tuile d'arrêt.
et marquer les horizontales et verticales issues de
la tuile d'arrêt. *C'est gagné!*

Théorème : il existe un jeu de tuiles qui
construit les carrés en temps réel

Extension en dimension 3 (avec force 3)

Objectif : étendre la construction à la dimension 3 (cubes avec des faces colorées, température 3).

- Première idée : mettre les colles de force 3 sur des segments de droites liant l'origine aux centres des faces opposées.
Insuffisant : il y a des tuiles inattachables.

Extension en dimension 3 (avec force 3)

Objectif : étendre la construction à la dimension 3 (cubes avec des faces colorées, température 3).

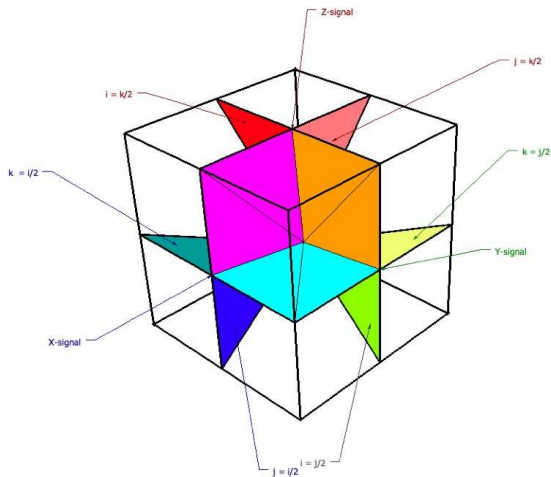
- Première idée : mettre les colles de force 3 sur des segments de droites liant l'origine aux centres des faces opposées.
Insuffisant : il y a des tuiles inattachables.
- Deuxième idée : mettre des colles de force 2 sur les parallèles aux axes issues des tuiles ouvrant les plans.

Extension en dimension 3 (avec force 3)

Objectif : étendre la construction à la dimension 3 (cubes avec des faces colorées, température 3).

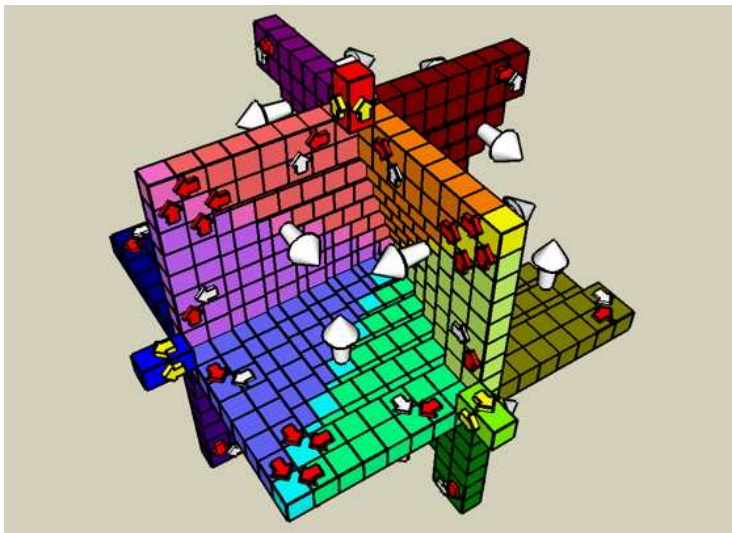
- Première idée : mettre les colles de force 3 sur des segments de droites liant l'origine aux centres des faces opposées.
Insuffisant : il y a des tuiles inattachables.
- Deuxième idée : mettre des colles de force 2 sur les parallèles aux axes issues des tuiles ouvrant les plans.
- Avec les autres techniques de la dimension 2 (déterminisme local, arrêt par la diagonale principale), ça marche.

Avancée du processus et partition du cube



Théorème : il existe un jeu de tuiles qui construit les cubes (de côté ≥ 2) en force 3.

Avancée du processus et partition du cube

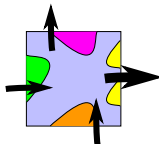
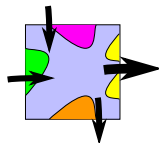
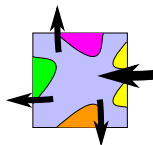


Théorème : il existe un jeu de tuiles qui construit les cubes (de côté ≥ 2) en force 3.

La question du changement d'échelle

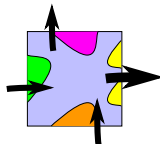
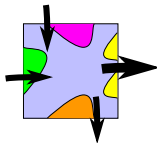
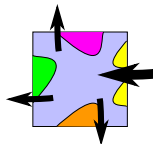
- Supposons que l'on ait un jeu de tuiles qui engendre une langage de formes
- Peut-on construire une jeu de tuiles qui engendre les mêmes formes, en 3 fois plus grand ?

- On crée un nouveau jeu de tuiles en codant les flèches par des couleurs, et en prenant en compte toutes les possibilités.



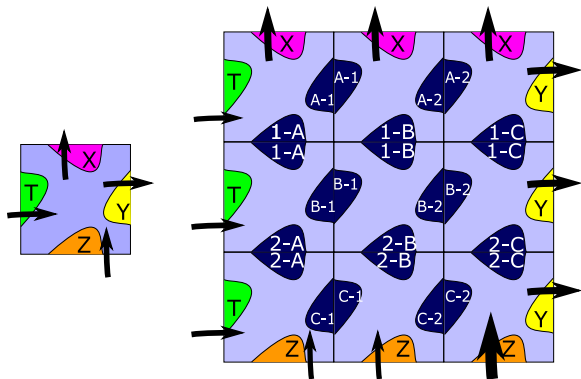
Les tuiles redondantes

- On crée un nouveau jeu de tuiles en codant les flèches par des couleurs, et en prenant en compte toutes les possibilités.
- Le jeu de tuiles redondantes engendre le même langage de formes que le jeu de départ.



L'agrandissement

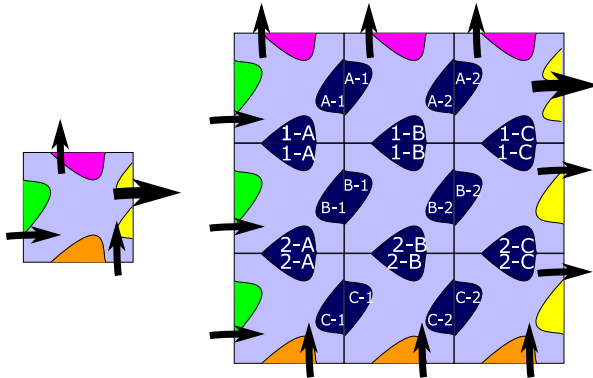
cas des colles unitaires



On agrandit chaque tuile redondante en utilisant des colles intérieures, portant le nom de la tuile, et le lieu du contact. Notion de *racine locale* et de *production locale*.

L'agrandissement

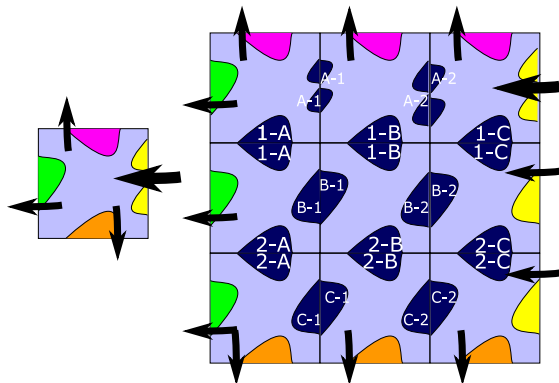
cas avec une colle de force 2 en sortie



On agrandit chaque tuile redondante en utilisant des colles intérieures, portant le nom de la tuile. et le lieu du contact. Notion de *racine locale* et de *production locale*.

L'agrandissement

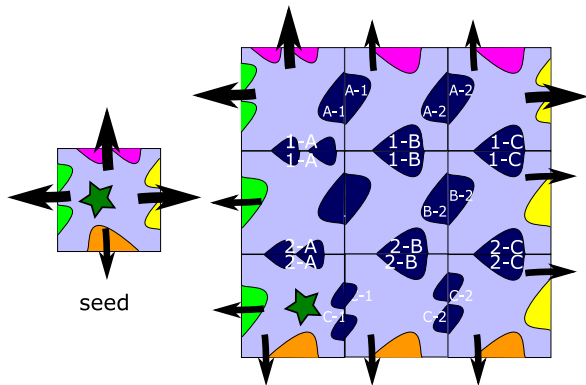
cas avec une colle de force 2 en entrée



On agrandit chaque tuile redondante en utilisant des colles intérieures, portant le nom de la tuile. et le lieu du contact. Notion de *racine locale* et de *production locale*.

L'agrandissement

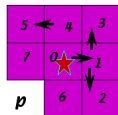
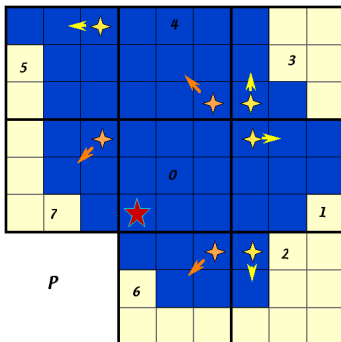
cas de la racine



On agrandit chaque tuile redondante en utilisant des colles intérieures, portant le nom de la tuile, et le lieu du contact. Notion de *racine locale* et de *production locale*.

Le lemme technique

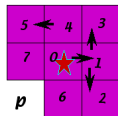
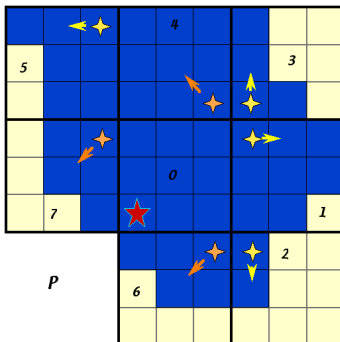
il existe une production p , telle que tout grand carré ouvert dans P correspond à une tuile de p , et pour toute chaîne menant à p , il existe une chaîne menant à P telle que :



Le lemme technique

il existe une production p , telle que tout grand carré ouvert dans P correspond à une tuile de p , et pour toute chaîne menant à p , il existe une chaîne menant à P telle que :

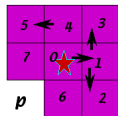
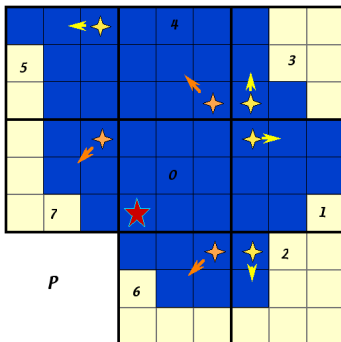
- on place les tuiles en respectant l'ordre des numéros,



Le lemme technique

il existe une production p , telle que tout grand carré ouvert dans P correspond à une tuile de p , et pour toute chaîne menant à p , il existe une chaîne menant à P telle que :

- on place les tuiles en respectant l'ordre des numéros,
- les tuiles ayant le même numéro (i.e. dans une même grand carré) sont placés suivant une production locale.



Corollaires :

- Les productions finales sont des agrandissements,

Corollaires :

- Les productions finales sont des agrandissements,
- Isomorphismes de demi-treillis.

Corollaires :

- Les productions finales sont des agrandissements,
- Isomorphismes de demi-treillis.
- **Théorème** : tout jeu de tuiles satisfaisant la condition RC est zoomable.

- savoir si un jeu de tuiles est RC est indécidable,

- savoir si un jeu de tuiles est RC est indécidable,
- la transformation proposée est chère ($O(n^2)$ nouvelles couleurs et nouvelles tuiles).

- savoir si un jeu de tuiles est RC est indécidable,
- la transformation proposée est chère ($O(n^2)$ nouvelles couleurs et nouvelles tuiles).
- si on change de jeu de tuiles, alors il faut tout recommencer.

Un résultat approximatif mais universel

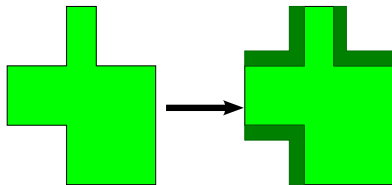
A partir d'un ensemble de couleurs, il existe un jeu de tuiles multiplicateur, tel que pour (presque) tout jeu de tuiles utilisant les couleurs données :

- il y a isomorphisme de treillis

Un résultat approximatif mais universel

A partir d'un ensemble de couleurs, il existe un jeu de tuiles multiplicateur, tel que pour (presque) tout jeu de tuiles utilisant les couleurs données :

- il y a isomorphisme de treillis
- Les productions finales sont "à peine" plus grandes que les productions agrandies souhaitées



D'autres questions sur l'auto-assemblage

- Langages de formes géométriques (polygones, cercles, ...)
- Pavages du plan tout entier
- Programmation par signaux
- Anisotropie : autres grilles sous-jacentes (euclidiennes, voire hyperboliques).

Tous les détails dans la thèse de Florent Becker, disponible à :

<http://perso.ens-lyon.fr/florent.becker/>