Noyaux et séries rationnelles à coefficients dans des semi-anneaux étoilés

A. Bouabdallah É. Laugerotte D. Ziadi
eric.laugerotte@univ-rouen.fr

LITIS - Université de Rouen

JORCAD'08

C. Cortes, P. Haffner et M. Mohri
Rational kernels : theory and algorithm
Journal of Machine Learning Research 2004.

G. Duchamp, H. Hadj Kacem et É. Laugerotte
Algebraic elimination of epsilon-transitions
Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science 2005.

Semi-anneau

Definition

Un semi-anneau $(R, +, \times, 0, 1)$ est une structure algébrique qui satisfait les conditions suivantes :

- $(R, +, 0)$ est un monoïde commutatif,
- $(R, \times, 1)$ est un monoïde,
- $\times$ est distributive à droite et à gauche par rapport à $+$,
- 0 est un élément absorbant.

Semi-anneau

Definition

Un semi-anneau $(R, +, \times, 0, 1)$ est une structure algébrique qui satisfait les conditions suivantes :

- $(R, +, 0)$ est un monoïde commutatif,
- $(R, \times, 1)$ est un monoïde,
- $\times$ est distributive à droite et à gauche par rapport à $+$,
- 0 est un élément absorbant.

Exemples de semi-anneaux

Semi-anneau	Ensemble	$+$	$\times$	0	1
Booléen	$\{0, 1\}$	$\vee$	$\wedge$	0	1
Probabilité	$\mathbb{R}^+$	$+$	$\times$	0	1
log	$\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$	$+_{\log}$	$+$	$+\infty$	0
MinPlus	$\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$	min	$+$	$+\infty$	0

Galaxie et étoile

Soit r un élément d'un semi-anneau R.

Definition

La galaxie de r est l'ensemble $\mathcal{T}(r)$ des solutions de l'identité du point fixe : $e \times r + 1 = e = r \times e + 1$.

Galaxie et étoile

Soit r un élément d'un semi-anneau R.

Definition

La galaxie de r est l'ensemble $\mathcal{T}(r)$ des solutions de l'identité du point fixe : $e \times r + 1 = e = r \times e + 1$.

Propriétés

- 1 est l'unique élément de $\mathcal{T}(0)$.
- Si R est $\mathbb{N}$-complet alors $\sum_{i \in \mathbb{N}} r^i$ appartient à $\mathcal{T}(r)$.

Galaxie et étoile

Soit r un élément d'un semi-anneau R.

Definition

La galaxie de r est l'ensemble $\mathcal{T}(r)$ des solutions de l'identité du point fixe : $e \times r + 1 = e = r \times e + 1$.

Propriétés

- 1 est l'unique élément de $\mathcal{T}(0)$.
- Si R est $\mathbb{N}$-complet alors $\sum_{i \in \mathbb{N}} r^i$ appartient à $\mathcal{T}(r)$.

semi-anneau de Lehmann

Aucune galaxie n'est vide.

Definition

L'étoile $*$ est une fonction qui à tout élément r d'un semi-anneau de Lehmann R associe un élément de $\mathcal{T}(r)$.

semi-anneau de Conway

C'est un semi-anneau de Lehmann tel que, pour tous les éléments r_1 et r_2, nous avons :

1. $(r_1 \times r_2)^* = 1 + r_1 \times (r_2 \times r_1)^* \times r_2$,
2. $(r_1 + r_2)^* = {r_1}^* \times (r_2 \times {r_1}^*)^*$.

semi-anneau de Conway

C'est un semi-anneau de Lehmann tel que, pour tous les éléments r_1 et r_2, nous avons :

1. $(r_1 \times r_2)^* = 1 + r_1 \times (r_2 \times r_1)^* \times r_2$,
2. $(r_1 + r_2)^* = {r_1}^* \times (r_2 \times {r_1}^*)^*$.

semi-anneau de Kleene

C'est un sous-semi-anneau R d'un semi-anneau $\mathbb{N}$-complet contenant $\sum_{i \in \mathbb{N}} r^i$ si r est un élément de R.

Theorem (Conway 1971)

Un semi-anneau de Kleene est un semi-anneau de Conway.

Dans la suite, on suppose qu'il existe un algorithme **A** pour calculer l'étoile de r, sans autre hypothèse ! ! !

Semi-anneau étoilé

Definition

Un semi-anneau étoilé est un semi-anneau de Lehmann muni d'un algorithme $\mathbf{A}$.

Semi-anneau étoilé

Definition

Un semi-anneau étoilé est un semi-anneau de Lehmann muni d'un algorithme **A**.

Il existe des semi-anneaux de Lehmann qui ne sont pas des semi-anneaux étoilés.

Exemple

L'ensemble des langages est un semi-anneau de Lehmann mais pas un semi-anneau étoilé.

Semi-anneau étoilé

Definition

Un semi-anneau étoilé est un semi-anneau de Lehmann muni d'un algorithme **A**.

Il existe des semi-anneaux de Lehmann qui ne sont pas des semi-anneaux étoilés.

Exemple

L'ensemble des langages est un semi-anneau de Lehmann mais pas un semi-anneau étoilé.

- ba^i est un mot du langage L ssi M_i n'accepte pas ba^i.

Semi-anneau étoilé

Definition

Un semi-anneau étoilé est un semi-anneau de Lehmann muni d'un algorithme **A**.

Il existe des semi-anneaux de Lehmann qui ne sont pas des semi-anneaux étoilés.

Exemple

L'ensemble des langages est un semi-anneau de Lehmann mais pas un semi-anneau étoilé.

- ba^i est un mot du langage L ssi M_i n'accepte pas ba^i.
- Le langage L^* n'est pas récursivement énumérable.

Semi-anneau partiellement étoilé

S. L. Bloom, Z. Ésik et W. Kuich
Partial Conway and iteration semirings
Fundamenta Informaticae 2008.

Semi-anneau partiellement étoilé

S. L. Bloom, Z. Ésik et W. Kuich
Partial Conway and iteration semirings
Fundamenta Informaticae 2008.

Definition

Un semi-anneau partiellement étoilé est un semi-anneau muni d'un algorithme **A** qui teste l'existence de solutions pour l'identité du point fixe et retourne une solution lorsque la galaxie n'est pas vide.

Semi-anneau partiellement étoilé

S. L. Bloom, Z. Ésik et W. Kuich
Partial Conway and iteration semirings
Fundamenta Informaticae 2008.

Definition

Un semi-anneau partiellement étoilé est un semi-anneau muni d'un algorithme **A** qui teste l'existence de solutions pour l'identité du point fixe et retourne une solution lorsque la galaxie n'est pas vide.

Exemple

Pour $\mathbb{R}^+$:

$$r^* = \begin{cases} 1/(1-r) & \text{si } r < 1, \\ \text{non défini} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit R un semi-anneau intègre partiellement étoilé dont seule la somme vide est nulle.

Le complété $R\{\omega\}$ de R est un semi-anneau étoilé obtenu en ajoutant un élément $\omega \notin R$ tel que :

- $r + \omega = r \times \omega = \omega = \omega \times r = \omega + r$ si $r \in R \setminus \{0\}$,
- $\omega + 0 = \omega = 0 + \omega$ et $\omega \times 0 = 0 = 0 \times \omega$,
- $\omega + \omega = \omega = \omega \times \omega$,
- $r^* = \omega$ si $\mathcal{T}(r) = \emptyset$, et $\omega^* = \omega$.

Soit R un semi-anneau intègre partiellement étoilé dont seule la somme vide est nulle.

Le complété $R\{\omega\}$ de R est un semi-anneau étoilé obtenu en ajoutant un élément $\omega \notin R$ tel que :

- $r + \omega = r \times \omega = \omega = \omega \times r = \omega + r$ si $r \in R \setminus \{0\}$,
- $\omega + 0 = \omega = 0 + \omega$ et $\omega \times 0 = 0 = 0 \times \omega$,
- $\omega + \omega = \omega = \omega \times \omega$,
- $r^* = \omega$ si $\mathcal{T}(r) = \emptyset$, et $\omega^* = \omega$.

Exemple

Pour $\mathbb{R}^+\{\omega\}$:

$$r^* = \begin{cases} 1/(1-r) & \text{si } r \neq \omega \text{ et } r < 1, \\ \omega & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il existe des semi-anneaux étoilés qui ne sont pas des semi-anneaux de Conway.

Il existe des semi-anneaux étoilés qui ne sont pas des semi-anneaux de Conway.

Exemple

Soit $\phi : \mathbb{N} \rightarrow R$ le morphisme canonique donné par $n \mapsto n\,1_R$.
L'image $\phi(\mathbb{N})$ est appelé semi-anneau de base.

Il existe des semi-anneaux étoilés qui ne sont pas des semi-anneaux de Conway.

Exemple

Soit $\phi : \mathbb{N} \to R$ le morphisme canonique donné par $n \mapsto n\,1_R$.
L'image $\phi(\mathbb{N})$ est appelé semi-anneau de base.

Deux possibilités :

Il existe des semi-anneaux étoilés qui ne sont pas des semi-anneaux de Conway.

Exemple

Soit $\phi : \mathbb{N} \longrightarrow R$ le morphisme canonique donné par $n \mapsto n\,1_R$.
L'image $\phi(\mathbb{N})$ est appelé semi-anneau de base.

Deux possibilités :

- $\phi(\mathbb{N}) \simeq \mathbb{N}$,

Il existe des semi-anneaux étoilés qui ne sont pas des semi-anneaux de Conway.

Exemple

Soit $\phi : \mathbb{N} \to R$ le morphisme canonique donné par $n \mapsto n\,1_R$.
L'image $\phi(\mathbb{N})$ est appelé semi-anneau de base.

Deux possibilités :

- $\phi(\mathbb{N}) \simeq \mathbb{N}$,
- $\phi(\mathbb{N}) \simeq B(e, p)$ avec $(e, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Il existe des semi-anneaux étoilés qui ne sont pas des semi-anneaux de Conway.

Exemple

Soit $\phi : \mathbb{N} \to R$ le morphisme canonique donné par $n \mapsto n\,1_R$.
L'image $\phi(\mathbb{N})$ est appelé semi-anneau de base.

Deux possibilités :

- $\phi(\mathbb{N}) \simeq \mathbb{N}$,
- $\phi(\mathbb{N}) \simeq B(e,p)$ avec $(e,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Le semi-anneau de base $B(e,p)$ est défini par :

$$n_1 \oplus n_2 = \begin{cases} n_1 + n_2 & \text{si } n_1 + n_2 < e, \\ e + [(n_1 + n_2 - e) \mod p] & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $n > 0$.

Proposition (Abbad et L. 2005)

Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $\mathcal{T}(n)$ contient un unique élément,
2. $n - 1$ et p sont premiers entre eux.

Soit $n > 0$.

Proposition (Abbad et L. 2005)

Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $\mathcal{T}(n)$ contient un unique élément,
2. $n - 1$ et p sont premiers entre eux.

L'existence et le calcul de l'étoile de n dans $B(e, p)$ sont obtenus en appliquant trois fois au plus l'algorithme d'Euclide étendu.

Soit $n > 0$.

Proposition (Abbad et L. 2005)

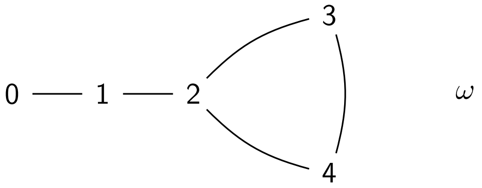
Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $\mathcal{T}(n)$ contient un unique élément,
2. $n - 1$ et p sont premiers entre eux.

L'existence et le calcul de l'étoile de n dans $B(e, p)$ sont obtenus en appliquant trois fois au plus l'algorithme d'Euclide étendu.

Si $e > 0$, le semi-anneau de base $B(e, p)$ est intègre et seule la somme vide est nulle.

$B(2,3)\{\omega\}$



$$0^{\circledast} = 1 \qquad 1^{\circledast} = \omega \qquad 2^{\circledast} = 2$$

$$3^{\circledast} = 4 \qquad 4^{\circledast} = \omega \qquad \omega^{\circledast} = \omega$$

$$(1 \oplus 1)^{\circledast} = 2 \neq \omega = 1^{\circledast} \otimes (1 \otimes 1^{\circledast})^{\circledast}$$

Étoile de matrices

D. J. Lehmann
Algebraic structures for transitive closure
Theoretical Computer Science 1977.

R. E. Tarjan
A unified approach to path problems
Journal Association of Computation Machine 1981.

Par des méthodes analogues à l'élimination de Gauss ou de Gauss-Jordan, le calcul de l'étoile d'une matrice résout :

Étoile de matrices

D. J. Lehmann
Algebraic structures for transitive closure
Theoretical Computer Science 1977.

R. E. Tarjan
A unified approach to path problems
Journal Association of Computation Machine 1981.

Par des méthodes analogues à l'élimination de Gauss ou de Gauss-Jordan, le calcul de l'étoile d'une matrice résout :

- le problème du chemin,

Étoile de matrices

D. J. Lehmann
Algebraic structures for transitive closure
Theoretical Computer Science 1977.

R. E. Tarjan
A unified approach to path problems
Journal Association of Computation Machine 1981.

Par des méthodes analogues à l'élimination de Gauss ou de Gauss-Jordan, le calcul de l'étoile d'une matrice résout :

- le problème du chemin,
- le passage de l'automate à l'expression rationnelle,

Étoile de matrices

D. J. Lehmann
Algebraic structures for transitive closure
Theoretical Computer Science 1977.

R. E. Tarjan
A unified approach to path problems
Journal Association of Computation Machine 1981.

Par des méthodes analogues à l'élimination de Gauss ou de Gauss-Jordan, le calcul de l'étoile d'une matrice résout :

- le problème du chemin,
- le passage de l'automate à l'expression rationnelle,
- la résolution de systèmes d'équations linéaires.

Proposition

Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. R est un semi-anneau étoilé,
2. $\mathcal{M}_n(R)$ $(n > 0)$ est un semi-anneau étoilé,
3. il existe $n > 0$ tel que $\mathcal{M}_n(R)$ est un semi-anneau étoilé.

Noyaux rationnels

Definition

Soient X et Y deux ensembles non vides. Toute fonction $K : X \times Y \to \mathbb{R}$ est un noyau sur $X \times Y$.

Noyaux rationnels

Definition

Soient X et Y deux ensembles non vides. Toute fonction $K : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ est un noyau sur $X \times Y$.

Definition

Si $X = \Sigma^*$ et $Y = \Delta^*$, le noyau est dit rationnel s'il existe un R-transducteur régulé $T = (\Sigma, \Delta, Q, I, F, E, \lambda, \rho)$ et une fonction $\psi : R \rightarrow \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \Sigma^*$ et $y \in \Delta^*$:

$$K(x, y) = \psi(\| T \| (x, y)).$$

Noyaux rationnels

Definition

Soient X et Y deux ensembles non vides. Toute fonction $K : X \times Y \to \mathbb{R}$ est un noyau sur $X \times Y$.

Definition

Si $X = \Sigma^*$ et $Y = \Delta^*$, le noyau est dit rationnel s'il existe un R-transducteur régulé $T = (\Sigma, \Delta, Q, I, F, E, \lambda, \rho)$ et une fonction $\psi : R \to \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \Sigma^*$ et $y \in \Delta^*$:

$$K(x, y) = \psi(\| T\| (x, y)).$$

Definition

Soient A et B deux R-automates sur l'alphabet Σ et Δ respectivement. Alors :

$$K(A, B) = \psi(\sum_{x,y} \|A\| (x) \times \| T\| (x, y) \times \|B\| (y))$$

Généralisation

Soit R un semi-anneau étoilé.

3. $K(A, B) = I_U M^* F_U$.

Généralisation

Soit R un semi-anneau étoilé.

1. Construction du R-transducteur $U = A \circ T \circ B$.

3. $K(A, B) = I_U M^* F_U$.

Généralisation

Soit R un semi-anneau étoilé.

1. Construction du R-transducteur $U = A \circ T \circ B$.
2. Calcul de M^* où M est la matrice de transition du graphe pondéré obtenu en supprimant l'indexation dans U.
3. $K(A, B) = I_U M^* F_U$.

http ://mupad-combinat.source-forge.net

Florent Hivert et Nicolas M. Thiéry
MuPAD-Combinat, an open-source package for research in algebraic combinatorics
Séminaire Lotharingien de combinatoire 2004.