

Stabilité de classes de sous-shifts par facteur et sous-action

Nathalie Aubrun et Mathieu Sablik

JORCAD'08

Quelques rappels sur les sous-shifts

Définition

Quelques classes particulières

Opérations sur les sous-shifts

Simulation par un sous-shift

Transformations locales

Transformations sur le groupe du sous-shift

Machine de Turing simulée par un sous-shift

Sous-shift défini par substitution

Espaces de calcul pour MT

Calculs de la MT donnés par un sofique

Un résultat de correspondance

Un ordre sur les langages

Correspondance des ordres

Schéma de la preuve

Plan de l'exposé

Quelques rappels sur les sous-shifts

Définition

Quelques classes particulières

Opérations sur les sous-shifts

Simulation par un sous-shift

Transformations locales

Transformations sur le groupe du sous-shift

Machine de Turing simulée par un sous-shift

Sous-shift défini par substitution

Espaces de calcul pour MT

Calculs de la MT donnés par un sofique

Un résultat de correspondance

Un ordre sur les langages

Correspondance des ordres

Schéma de la preuve

Définition et exemple

- \mathcal{A} alphabet fini
- $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ coloriage de \mathbb{Z}^d
- F ensemble de motifs interdits
- $\Sigma = X_F = \{x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d} \mid \forall m \in F, m \text{ n'apparaît pas dans } x\} \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$

Définition et exemple

- \mathcal{A} alphabet fini
- $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ coloriages de \mathbb{Z}^d
- F ensemble de motifs interdits
- $\Sigma = X_F = \{x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d} / \forall m \in F, m \text{ n'apparaît pas dans } x\} \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$

Exemples :

- $\mathcal{A} = \{0, 1\}$
 $\Sigma_1 = X_{\{10^{2n+1}1 / n \in \mathbb{N}\}}$
- $\mathcal{A} = \{0, 1\}$
 $\Sigma'_1 = X_{\{01, 0101, \dots, (01)^n, \dots\}}$

Définition et exemple

- \mathcal{A} alphabet fini
- $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ coloriages de \mathbb{Z}^d
- F ensemble de motifs interdits
- $\Sigma = X_F = \{x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d} / \forall m \in F, m \text{ n'apparaît pas dans } x\} \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$

Exemples :

- $\mathcal{A} = \{0, 1\}$
 $\Sigma_1 = X_{\{10^{2n+1}1 / n \in \mathbb{N}\}}$
- $\mathcal{A} = \{0, 1\}$
 $\Sigma'_1 = X_{\{01, 0101, \dots, (01)^n, \dots\}}$

Remarque : F n'est pas unique.

Plan de l'exposé

Quelques rappels sur les sous-shifts

Définition

Quelques classes particulières

Opérations sur les sous-shifts

Simulation par un sous-shift

Transformations locales

Transformations sur le groupe du sous-shift

Machine de Turing simulée par un sous-shift

Sous-shift défini par substitution

Espaces de calcul pour MT

Calculs de la MT donnés par un sofique

Un résultat de correspondance

Un ordre sur les langages

Correspondance des ordres

Schéma de la preuve

SFT et RE

Définition

On dit que Σ est un SFT s'il existe F fini tel que $\Sigma = X_F$.

Intérêt :

- en dimension 1 : définition par graphes
- en dimension 2 : SFT = pavage

SFT et RE

Définition

On dit que Σ est un SFT s'il existe F fini tel que $\Sigma = X_F$.

Intérêt :

- en dimension 1 : définition par graphes
- en dimension 2 : SFT = pavage

Définition

On dit que Σ est un sous-shift récursivement énumérable (RE) s'il existe F RE tel que $\Sigma = X_F$.

Plan de l'exposé

Quelques rappels sur les sous-shifts

Définition

Quelques classes particulières

Opérations sur les sous-shifts

Simulation par un sous-shift

Transformations locales

Transformations sur le groupe du sous-shift

Machine de Turing simulée par un sous-shift

Sous-shift défini par substitution

Espaces de calcul pour MT

Calculs de la MT donnés par un sofique

Un résultat de correspondance

Un ordre sur les langages

Correspondance des ordres

Schéma de la preuve

Simulation par un sous-shift

Définition

Si op est un ensemble d'opérations sur les sous-shifts, on dit que $\Sigma \in \mathcal{C}l_{op}(\Sigma')$ si Σ' simule Σ , c-à-d on peut obtenir Σ avec un nombre fini de ces opérations appliquées à Σ' .

Simulation par un sous-shift

Définition

Si op est un ensemble d'opérations sur les sous-shifts, on dit que $\Sigma \in Cl_{op}(\Sigma')$ si Σ' simule Σ , c-à-d on peut obtenir Σ avec un nombre fini de ces opérations appliquées à Σ' .

- $Cl_{op}(\Sigma) = \{\Sigma' \text{ simulés par } \Sigma \text{ avec les opérations } op\}$
- relation sur les sous-shifts : $\Sigma \leq_{op} \Sigma' \Leftrightarrow \Sigma \in Cl_{op}(\Sigma')$

Propriété :

\leq_{op} est un pré-ordre (réflexive et transitive).

Plan de l'exposé

Quelques rappels sur les sous-shifts

Définition

Quelques classes particulières

Opérations sur les sous-shifts

Simulation par un sous-shift

Transformations locales

Transformations sur le groupe du sous-shift

Machine de Turing simulée par un sous-shift

Sous-shift défini par substitution

Espaces de calcul pour MT

Calculs de la MT donnés par un sofique

Un résultat de correspondance

Un ordre sur les langages

Correspondance des ordres

Schéma de la preuve

Type fini

Définition

Si $\Sigma = X_F \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ est un sous-shift et F' un ensemble fini de motifs :

$$\phi_{TF}(F', \Sigma) = X_{F \cup F'}.$$

Type fini

Définition

Si $\Sigma = X_F \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ est un sous-shift et F' un ensemble fini de motifs :

$$\phi_{TF}(F', \Sigma) = X_{F \cup F'}.$$

Remarque :

$$\mathcal{C}l_{TF}(\mathcal{FS}) = \mathcal{SFT}$$

Produit

Définition

Soient $\Sigma = X_F \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ et $\Sigma' = X_{F'} \subseteq \mathcal{B}^{\mathbb{Z}^d}$ deux sous-shifts de même dimension. Leur produit est $\Sigma \times \Sigma' = X_{F \times F'} \subseteq (\mathcal{A} \times \mathcal{B})^{\mathbb{Z}^d}$.

Produit

Définition

Soient $\Sigma = X_F \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ et $\Sigma' = X_{F'} \subseteq \mathcal{B}^{\mathbb{Z}^d}$ deux sous-shifts de même dimension. Leur produit est $\Sigma \times \Sigma' = X_{F \times F'} \subseteq (\mathcal{A} \times \mathcal{B})^{\mathbb{Z}^d}$.

$$\left. \begin{array}{l}
 \Sigma = X_F \subseteq \{a, b, c\}^{\mathbb{Z}^2} \\
 F = \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline x & a \\ \hline a & y \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline x & b \\ \hline b & y \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline x & c \\ \hline c & y \\ \hline \end{array} \right\} \\
 \Sigma' = X_{F'} \subseteq \{\text{red}, \text{blue}\}^{\mathbb{Z}^2} \\
 F' = \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline \text{red} & \text{blue} \\ \hline \text{blue} & \text{red} \\ \hline \end{array} \right\}
 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l}
 \Sigma \times \Sigma' \subseteq \{a, b, c, a, b, c\}^{\mathbb{Z}^2} \\
 F \times F' = \\
 \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline x & a \\ \hline a & y \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline x & a \\ \hline a & y \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline x & a \\ \hline a & y \\ \hline \end{array}, \dots \right\}
 \end{array}$$

Produit

Définition

Soient $\Sigma = X_F \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ et $\Sigma' = X_{F'} \subseteq \mathcal{B}^{\mathbb{Z}^d}$ deux sous-shifts de même dimension. Leur produit est $\Sigma \times \Sigma' = X_{F \times F'} \subseteq (\mathcal{A} \times \mathcal{B})^{\mathbb{Z}^d}$.

$$\left. \begin{array}{l}
 \Sigma = X_F \subseteq \{a, b, c\}^{\mathbb{Z}^2} \\
 F = \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline x & a \\ \hline a & y \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline x & b \\ \hline b & y \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline x & c \\ \hline c & y \\ \hline \end{array} \right\} \\
 \Sigma' = X_{F'} \subseteq \{\text{red}, \text{blue}\}^{\mathbb{Z}^2} \\
 F' = \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline \text{red} & \text{blue} \\ \hline \text{blue} & \text{red} \\ \hline \end{array} \right\}
 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l}
 \Sigma \times \Sigma' \subseteq \{a, b, c, a, b, c\}^{\mathbb{Z}^2} \\
 F \times F' = \\
 \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline x & a \\ \hline a & y \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline x & a \\ \hline a & y \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline x & a \\ \hline a & y \\ \hline \end{array}, \dots \right\}
 \end{array}$$

Remarque :

$$Cl_P(SFT) = SFT$$

Facteur

Définition

Soit $\Sigma \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ un sous-shift et $\Pi : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow \mathcal{B}^{\mathbb{Z}^d}$ un morphisme (continue et $\sigma \circ \Pi = \Pi \circ \sigma$). Alors $\Pi(\Sigma) \subseteq \mathcal{B}^{\mathbb{Z}^d}$ est un facteur de Σ .

Facteur

Définition

Soit $\Sigma \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ un sous-shift et $\Pi : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow \mathcal{B}^{\mathbb{Z}^d}$ un morphisme (continue et $\sigma \circ \Pi = \Pi \circ \sigma$). Alors $\Pi(\Sigma) \subseteq \mathcal{B}^{\mathbb{Z}^d}$ est un facteur de Σ .

Exemple :

$\mathcal{A} = \{0, 1, 2\}$ et $\Sigma_3 \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$

$\Sigma_3 = X_{\{00,22,01,12\}}$ et $\Pi(0) = \Pi(2) = 0, \Pi(1) = 1$

$$\Rightarrow \Pi(\Sigma_3) = \Sigma_1$$

Facteur

Définition

Soit $\Sigma \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ un sous-shift et $\Pi : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow \mathcal{B}^{\mathbb{Z}^d}$ un morphisme (continue et $\sigma \circ \Pi = \Pi \circ \sigma$). Alors $\Pi(\Sigma) \subseteq \mathcal{B}^{\mathbb{Z}^d}$ est un facteur de Σ .

Exemple :

$\mathcal{A} = \{0, 1, 2\}$ et $\Sigma_3 \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$

$\Sigma_3 = X_{\{00,22,01,12\}}$ et $\Pi(0) = \Pi(2) = 0, \Pi(1) = 1$

$$\Rightarrow \Pi(\Sigma_3) = \Sigma_1$$

Remarque : Ceci montre $SFT \subsetneq \mathcal{C}I_F(SFT)$. On appelle $\mathcal{C}I_F(SFT)$ la classe des sous-shift sofiques. En dimension 1, les sofiques sont les $X_{\mathcal{L}}$ où \mathcal{L} est rationnel.

Plan de l'exposé

Quelques rappels sur les sous-shifts

Définition

Quelques classes particulières

Opérations sur les sous-shifts

Simulation par un sous-shift

Transformations locales

Transformations sur le groupe du sous-shift

Machine de Turing simulée par un sous-shift

Sous-shift défini par substitution

Espaces de calcul pour MT

Calculs de la MT donnés par un sofique

Un résultat de correspondance

Un ordre sur les langages

Correspondance des ordres

Schéma de la preuve

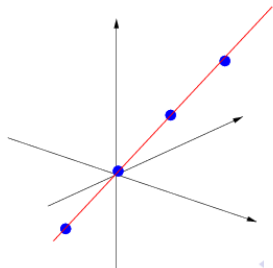
Sous-action

Définition

Soit \mathbb{G} un sous-groupe de \mathbb{Z}^d engendré par $u_1, u_2, \dots, u_{d'}$ ($d' \leq d$). Si $\Sigma \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ est un sous-shift :

$$\phi_{SA}(\mathbb{G}, \Sigma) = \left\{ y \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^{d'}} : \exists x \in \Sigma \text{ tel que } \forall i_1, \dots, i_{d'} \in \mathbb{Z}^{d'}, \right.$$

$$\left. y_{i_1, \dots, i_{d'}} = x_{i_1 u_1 + \dots + i_{d'} u_{d'}} \right\}.$$



SFT non stable par sous-action

On définit un SFT Σ par ses motifs autorisés de taille $4 * 4$:

		2	0
	1	0	1
2	0	2	
0	1		

;

		.	.
	2	0	.
1	0	1	
0	2		

;

		1	0
	2	0	2
.	0	1	
.	.		

;

		.	
	.	.	.
2	0	.	
0	1		

;

		.	
	.		.
.	.	.	
0	.		

;

		2	0
	.	0	1
.	.	.	
	.		

;

		.	0
	.	.	.
.		.	
	.		

SFT non stable par sous-action

On définit un SFT Σ par ses motifs autorisés de taille $4 * 4$:

		2	0
	1	0	1
2	0	2	
0	1		

;

		.	.
	2	0	.
1	0	1	
0	2		

;

		1	0
	2	0	2
.	0	1	
.	.		

		.	
	.	.	.
2	0	.	
0	1		

;

		.	
	.		.
.	.	.	
0	.		

;

		2	0
	.	0	1
.	.	.	
	.		

;

		.	0
	.	.	.
.		.	
	.		

Ainsi $\Sigma_0^{\{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 / x=y\}} =$

$\{x \in \{0, 1, 2\}^{\mathbb{Z}} / \text{les blocs de 0 consécutifs sont de longueurs paires}\}.$

On a donc $SFT \subsetneq CI_{SA}(SFT).$

SFT non stable par sous-action

On définit un SFT Σ par ses motifs autorisés de taille 4×4 :

		2	0
	1	0	1
2	0	2	
0	1		

;

		.	.
	2	0	.
1	0	1	
0	2		

;

		1	0
	2	0	2
.	0	1	
.	.		

		.	
	.	.	.
2	0	.	
0	1		

;

		.	
	.		.
.	.	.	
0	.		

;

		2	0
	.	0	1
.	.	.	
.	.		

;

		.	0
	.	.	.
.		.	
.	.		

Ainsi $\Sigma_{\{0\}}^{\{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 / x=y\}} =$

$\{x \in \{0, 1, 2\}^{\mathbb{Z}} / \text{les blocs de 0 consécutifs sont de longueurs paires}\}.$

On a donc $SFT \subsetneq Cl_{SA}(SFT)$. En fait $Cl_{SA}(RE) = RE$ et Hochman montre que $Cl_{F,SA}(SFT) = RE$.

Superposition

Définition

Soit $\Sigma \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ un sous-shift et $\mathbb{Z}^d \simeq \mathbb{G} < \mathbb{G} \oplus \mathbb{G}' = \mathbb{Z}^{d+d'}$. Alors la superposition de Σ dans $\mathbb{G} \oplus \mathbb{G}'$ selon la direction \mathbb{G}' est

$$\phi_{SP}(\mathbb{G}, \mathbb{G}', \Sigma) = \{x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^{d+d'}} / \forall u \in \mathbb{G}', x|_{\mathbb{G}+u} \in \Sigma\}.$$

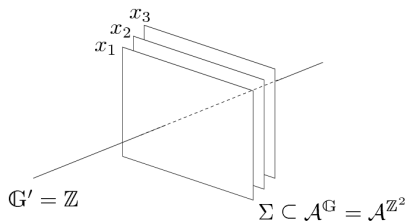
Superposition

Définition

Soit $\Sigma \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ un sous-shift et $\mathbb{Z}^d \simeq \mathbb{G} < \mathbb{G} \oplus \mathbb{G}' = \mathbb{Z}^{d+d'}$. Alors la superposition de Σ dans $\mathbb{G} \oplus \mathbb{G}'$ selon la direction \mathbb{G}' est

$$\phi_{SP}(\mathbb{G}, \mathbb{G}', \Sigma) = \{x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^{d+d'}} / \forall u \in \mathbb{G}', x|_{\mathbb{G}+u} \in \Sigma\}.$$

Exemple :



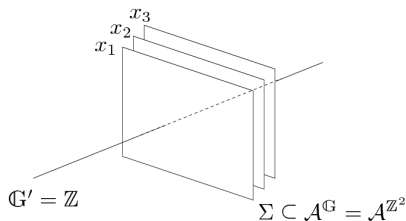
Superposition

Définition

Soit $\Sigma \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ un sous-shift et $\mathbb{Z}^d \simeq \mathbb{G} < \mathbb{G} \oplus \mathbb{G}' = \mathbb{Z}^{d+d'}$. Alors la superposition de Σ dans $\mathbb{G} \oplus \mathbb{G}'$ selon la direction \mathbb{G}' est

$$\phi_{SP}(\mathbb{G}, \mathbb{G}', \Sigma) = \{x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^{d+d'}} / \forall u \in \mathbb{G}', x|_{\mathbb{G}+u} \in \Sigma\}.$$

Exemple :



Remarque :

$$Cl_{SP}(SFT) = SFT$$

Plan de l'exposé

Quelques rappels sur les sous-shifts

Définition

Quelques classes particulières

Opérations sur les sous-shifts

Simulation par un sous-shift

Transformations locales

Transformations sur le groupe du sous-shift

Machine de Turing simulée par un sous-shift

Sous-shift défini par substitution

Espaces de calcul pour MT

Calculs de la MT donnés par un sofique

Un résultat de correspondance

Un ordre sur les langages

Correspondance des ordres

Schéma de la preuve

Sous-shift défini par substitution

On considère la substitution $s_n : \{\circ, \bullet\} \rightarrow \{\circ, \bullet\}^{[1\dots n] \times [1\dots n]}$ définie par :

$$\circ \mapsto \begin{array}{cccc} \circ & \dots & \circ & \circ \\ \vdots & \nearrow & \bullet & \circ \\ \circ & \nearrow & \nearrow & \vdots \\ \bullet & \circ & \dots & \circ \end{array} \quad \text{and} \quad \bullet \mapsto \begin{array}{cccc} \circ & \dots & \circ & \bullet \\ \vdots & \nearrow & \bullet & \circ \\ \circ & \nearrow & \nearrow & \vdots \\ \bullet & \circ & \dots & \circ \end{array}$$

Sous-shift défini par substitution

On considère la substitution $s_n : \{\circ, \bullet\} \rightarrow \{\circ, \bullet\}^{[1\dots n] \times [1\dots n]}$ définie par :

$$\circ \mapsto \begin{array}{cccc} \circ & \dots & \circ & \circ \\ \vdots & \ddots & \bullet & \circ \\ \circ & \ddots & \ddots & \vdots \\ \bullet & \circ & \dots & \circ \end{array} \quad \text{and} \quad \bullet \mapsto \begin{array}{cccc} \circ & \dots & \circ & \bullet \\ \vdots & \ddots & \bullet & \circ \\ \circ & \ddots & \ddots & \vdots \\ \bullet & \circ & \dots & \circ \end{array}$$

Définition

Le sous-shift défini par la substitution s_n est : $\Sigma_n = \{x \in \{\circ, \bullet\}^{\mathbb{Z}^2} : \text{tout motif fini de } x \text{ apparaît dans un } s_n^k(\circ) \text{ ou } s_n^k(\bullet)\}$.

Sous-shift défini par substitution

On considère la substitution $s_n : \{\circ, \bullet\} \rightarrow \{\circ, \bullet\}^{[1\dots n] \times [1\dots n]}$ définie par :

$$\circ \mapsto \begin{array}{cccc} \circ & \dots & \circ & \circ \\ \vdots & \ddots & \bullet & \circ \\ \circ & \ddots & \ddots & \vdots \\ \bullet & \circ & \dots & \circ \end{array} \quad \text{and} \quad \bullet \mapsto \begin{array}{cccc} \circ & \dots & \circ & \bullet \\ \vdots & \ddots & \bullet & \circ \\ \circ & \ddots & \ddots & \vdots \\ \bullet & \circ & \dots & \circ \end{array}$$

Définition

Le sous-shift défini par la substitution s_n est : $\Sigma_n = \{x \in \{\circ, \bullet\}^{\mathbb{Z}^2} : \text{tout motif fini de } x \text{ apparaît dans un } s_n^k(\circ) \text{ ou } s_n^k(\bullet)\}$.

Proposition[Mozes]

Pour tout entier n , Σ_n est un sous-shift sofique.

Plan de l'exposé

Quelques rappels sur les sous-shifts

Définition

Quelques classes particulières

Opérations sur les sous-shifts

Simulation par un sous-shift

Transformations locales

Transformations sur le groupe du sous-shift

Machine de Turing simulée par un sous-shift

Sous-shift défini par substitution

Espaces de calcul pour MT

Calculs de la MT donnés par un sofique

Un résultat de correspondance

Un ordre sur les langages

Correspondance des ordres

Schéma de la preuve

Espaces de calcul pour MT

Proposition

Si p est un nombre premier et $x \in \Sigma_p$, en notant

$E(x) = \{u \in \mathbb{Z}^2 / x_u = \bullet\}$ on a à une translation près :

$$E(x) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{p-1} (p^n \mathbb{Z} + kp^{n-1}) \times (p^n \mathbb{Z} + kp^{n-1}).$$

Espaces de calcul pour MT

Proposition

Si p est un nombre premier et $x \in \Sigma_p$, en notant

$E(x) = \{u \in \mathbb{Z}^2 / x_u = \bullet\}$ on a à une translation près :

$$E(x) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{p-1} (p^n \mathbb{Z} + kp^{n-1}) \times (p^n \mathbb{Z} + kp^{n-1}).$$

Définition

Si $\Sigma \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$ est un sous-shift, on définit :

$$\Sigma^{(\uparrow)} = \{x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2} : \exists y \in \mathbf{T}, \forall (i, j) \in \mathbb{Z}^2, x_{(i, j)} = y_{(i, j-i)}\}.$$

Espaces de calcul pour MT

Proposition

Si p est un nombre premier et $x \in \Sigma_p$, en notant

$E(x) = \{u \in \mathbb{Z}^2 / x_u = \bullet\}$ on a à une translation près :

$$E(x) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{p-1} (p^n \mathbb{Z} + kp^{n-1}) \times (p^n \mathbb{Z} + kp^{n-1}).$$

Définition

Si $\Sigma \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$ est un sous-shift, on définit :

$\Sigma^{(\uparrow)} = \{x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2} : \exists y \in \mathbf{T}, \forall (i, j) \in \mathbb{Z}^2, x_{(i, j)} = y_{(i, j-i)}\}$.

On s'intéresse à $\Sigma_p^{(\uparrow)}$:

- sur une même ligne (colonne) les • sont espacés de p^n

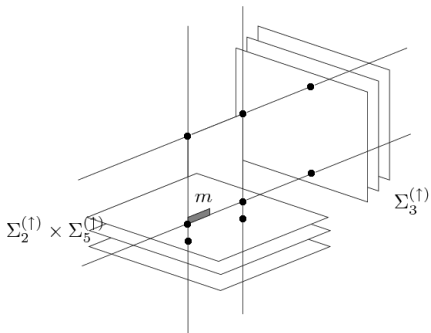
$$\bullet \dots \bullet \dots p^n \dots \bullet \dots p^n \dots \bullet \dots p^n \dots \bullet$$

\Rightarrow

$$\bullet \dots \bullet \dots p^{n+1} \dots \bullet \dots p^{n+1} \dots \bullet \dots$$

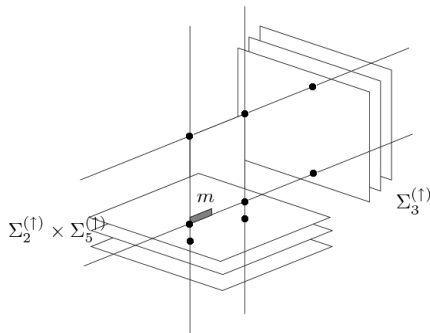
Construction de rectangles

Par opérations SP , P et TF :



Construction de rectangles

Par opérations SP , P et TF :



\Rightarrow rectangles de largeur 5^n et de hauteur 3^m avec un mot d'entrée de taille $\leq 2^q$

Plan de l'exposé

Quelques rappels sur les sous-shifts

Définition

Quelques classes particulières

Opérations sur les sous-shifts

Simulation par un sous-shift

Transformations locales

Transformations sur le groupe du sous-shift

Machine de Turing simulée par un sous-shift

Sous-shift défini par substitution

Espaces de calcul pour MT

Calculs de la MT donnés par un sofique

Un résultat de correspondance

Un ordre sur les langages

Correspondance des ordres

Schéma de la preuve

Machine de Turing

Définition

Soit $\mathcal{M} = (Q, \mathcal{A}, \Gamma, \#, q_0, \delta, Q_F)$ une machine de Turing :

- Q ensemble fini d'états ; $q_0 \in Q$ l'état initial ;
- \mathcal{A} et Γ deux alphabets finis tels que $\mathcal{A} \subsetneq \Gamma$;
- $\# \notin \Gamma$ le symbole blanc ;
- $\delta : Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{\leftarrow, \cdot, \rightarrow\}$ la fonction de transition ;
- $F \subset Q_F$ ensemble des états finaux.

Machine de Turing

Définition

Soit $\mathcal{M} = (Q, \mathcal{A}, \Gamma, \#, q_0, \delta, Q_F)$ une machine de Turing :

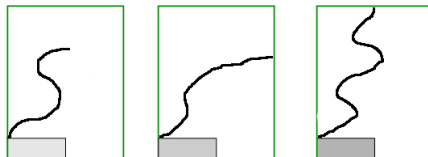
- Q ensemble fini d'états ; $q_0 \in Q$ l'état initial ;
- \mathcal{A} et Γ deux alphabets finis tels que $\mathcal{A} \subsetneq \Gamma$;
- $\# \notin \Gamma$ le symbole blanc ;
- $\delta : Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{\leftarrow, \cdot, \rightarrow\}$ la fonction de transition ;
- $F \subset Q_F$ ensemble des états finaux.

$\delta(q_1, x) = (q_2, y, \leftarrow)$ est codée par :

(q_2, z)	y	z'
z	(q_1, x)	z'

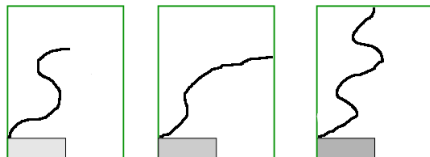
Calculs sur les rectangles

On ajoute ces règles (TF) sur les espaces de calculs :



Calculs sur les rectangles

On ajoute ces règles (TF) sur les espaces de calculs :



⇒ si la machine \mathcal{M} s'arrête sur l'entrée m , il existe un rectangle dans lequel ce calcul termine.

Plan de l'exposé

Quelques rappels sur les sous-shifts

Définition

Quelques classes particulières

Opérations sur les sous-shifts

Simulation par un sous-shift

Transformations locales

Transformations sur le groupe du sous-shift

Machine de Turing simulée par un sous-shift

Sous-shift défini par substitution

Espaces de calcul pour MT

Calculs de la MT donnés par un sofique

Un résultat de correspondance

Un ordre sur les langages

Correspondance des ordres

Schéma de la preuve

Machines à semi-oracle

Définition

Soit \mathcal{L} un langage. Une machine de Turing à semi-oracle \mathcal{L} est une MT classique $\mathcal{M}^{\mathcal{L}}$ avec un état d'interrogation $q_?$ et un ruban d'oracle. $\mathcal{M}^{\mathcal{L}}$ calcule sur m et forme m' sur le ruban d'oracle, et quand $\mathcal{M}^{\mathcal{L}}$ entre dans l'état $q_?$:

- si $m' \in \mathcal{L}$ alors $\mathcal{M}^{\mathcal{L}}$ s'arrête
- sinon $\mathcal{M}^{\mathcal{L}}$ continue son calcul

Machines à semi-oracle

Définition

Soit \mathcal{L} un langage. Une machine de Turing à semi-oracle \mathcal{L} est une MT classique $\mathcal{M}^{\mathcal{L}}$ avec un état d'interrogation $q_?$ et un ruban d'oracle. $\mathcal{M}^{\mathcal{L}}$ calcule sur m et forme m' sur le ruban d'oracle, et quand $\mathcal{M}^{\mathcal{L}}$ entre dans l'état $q_?$:

- si $m' \in \mathcal{L}$ alors $\mathcal{M}^{\mathcal{L}}$ s'arrête
- sinon $\mathcal{M}^{\mathcal{L}}$ continue son calcul

Définition

On définit un semi-ordre sur les ensembles de motifs :

$$\mathcal{L} \preceq \mathcal{L}' \iff \exists \mathcal{M}^{\mathcal{L}'}$$

une machine de Turing avec semi-oracle \mathcal{L}'
telle que $\text{dom}(\mathcal{M}^{\mathcal{L}'}) = \mathcal{L}$.

Plan de l'exposé

Quelques rappels sur les sous-shifts

Définition

Quelques classes particulières

Opérations sur les sous-shifts

Simulation par un sous-shift

Transformations locales

Transformations sur le groupe du sous-shift

Machine de Turing simulée par un sous-shift

Sous-shift défini par substitution

Espaces de calcul pour MT

Calculs de la MT donnés par un sofique

Un résultat de correspondance

Un ordre sur les langages

Correspondance des ordres

Schéma de la preuve

Théorème

Théorème

$$Cl_{P,F,SA,SP,TF}(\Sigma) = \{X_{\mathcal{L}} : \mathcal{L} \preceq \mathcal{L}(\Sigma)^c\}$$

Autrement dit : $\Sigma' \leq_{P,F,FT,SA,SP} \Sigma'' \iff \mathcal{L}(\Sigma')^c \preceq \mathcal{L}(\Sigma'')^c$

Théorème

Théorème

$$Cl_{P,F,SA,SP,TF}(\Sigma) = \{X_{\mathcal{L}} : \mathcal{L} \preceq \mathcal{L}(\Sigma)^c\}$$

Autrement dit : $\Sigma' \leq_{P,F,TF,SA,SP} \Sigma'' \iff \mathcal{L}(\Sigma')^c \preceq \mathcal{L}(\Sigma'')^c$

Application

Il n'existe pas de sous-shift qui puisse simuler tous les autres : si $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathbf{T})^c$ on a $Cl_{P,F,SA,SP,TF}(\mathbf{T}) = \{\mathbf{T}_{\mathcal{L}'} : \mathcal{L}' \preceq \mathcal{L}\}$, mais il existe \mathcal{L}'' strictement supérieur à \mathcal{L} .

Plan de l'exposé

Quelques rappels sur les sous-shifts

Définition

Quelques classes particulières

Opérations sur les sous-shifts

Simulation par un sous-shift

Transformations locales

Transformations sur le groupe du sous-shift

Machine de Turing simulée par un sous-shift

Sous-shift défini par substitution

Espaces de calcul pour MT

Calculs de la MT donnés par un sofique

Un résultat de correspondance

Un ordre sur les langages

Correspondance des ordres

Schéma de la preuve

Idée de la preuve

$\Rightarrow Cl_{P,F,SA,SP,TF}(X_{\mathcal{L}}) \subseteq \{X_{\mathcal{L}'}/\mathcal{L}' \preceq \mathcal{L}(\Sigma)^c\}$
par induction, $\{X_{\mathcal{L}'}/\mathcal{L}' \preceq \mathcal{L}(\Sigma)^c\}$ est stable par chacune des opérations

Idée de la preuve

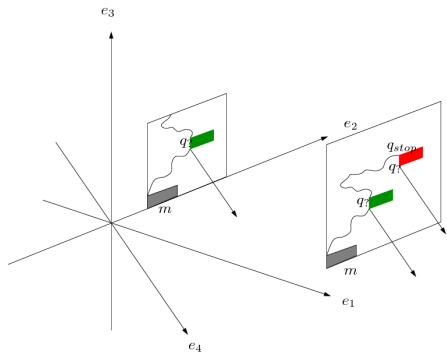
- $\Rightarrow Cl_{P,F,SA,SP,TF}(X_{\mathcal{L}}) \subseteq \{X_{\mathcal{L}'} / \mathcal{L}' \preceq \mathcal{L}(\Sigma)^c\}$
 par induction, $\{X_{\mathcal{L}'} / \mathcal{L}' \preceq \mathcal{L}(\Sigma)^c\}$ est stable par chacune des opérations
- $\Rightarrow Cl_{P,F,SA,SP,TF}(X_{\mathcal{L}}) \supseteq \{X_{\mathcal{L}'} / \mathcal{L}' \preceq \mathcal{L}(\Sigma)^c\}$

Idée de la preuve

⇒ $Cl_{P,F,SA,SP,TF}(X_{\mathcal{L}}) \subseteq \{X_{\mathcal{L}'}/\mathcal{L}' \preceq \mathcal{L}(\Sigma)^c\}$
 par induction, $\{X_{\mathcal{L}'}/\mathcal{L}' \preceq \mathcal{L}(\Sigma)^c\}$ est stable par chacune des opérations

⇒ $Cl_{P,F,SA,SP,TF}(X_{\mathcal{L}}) \supseteq \{X_{\mathcal{L}'}/\mathcal{L}' \preceq \mathcal{L}(\Sigma)^c\}$

- SFT de dimension 4 pour \mathcal{L} et \mathcal{L}' de dimension 1
- sur $\mathbb{Z}e_1$: $X_{\mathcal{L}'}$, recopié sur $\mathbb{Z}e_2$
- sur $\mathbb{Z}e_2 \oplus \mathbb{Z}e_3$: espaces de calcul et MT
- sur $\mathbb{Z}e_4$: oracle



Conclusion

- Etude de l'ordre \preceq
- Diminuer la dimension dans la construction de la preuve ?
- Pour quelles classes peut-on trouver un sous-shift universel ?

Conclusion

- Etude de l'ordre \preceq
- Diminuer la dimension dans la construction de la preuve ?
- Pour quelles classes peut-on trouver un sous-shift universel ?

Questions ?