

Cours de Licence-2 de mathématiques

Équations différentielles
Intégrales curvilignes et courbes

Chao-Jiang XU
Département de Mathématiques
Université de Rouen
76801 Saint-Etienne du Rouvray, France
Année 2008–2009

Table des matières

Chapitre 1. Équations différentielles	1
1.1. Généralités	1
1.2. Méthodes pratiques de résolution	3
1.3. Équation scalaire linéaire du premier ordre	6
1.4. Le lemme de Gronwall	9
1.5. Équation linéaire du second ordre à coefficients constants	10
Chapitre 2. Formes différentielles du premier ordre	11
2.1. Définitions et notations	11
2.2. Transposition de forme différentielle	12
2.3. Formes différentielles fermées	13
Chapitre 3. Arcs géométriques	17
3.1. Arcs géométriques	17
3.2. Contact des arcs	22
3.3. Tangente, plan osculateur	26
3.4. Étude des arcs plans	29
Chapitre 4. Métriques des arcs	33
4.1. Longueur d'une courbe	33
4.2. Paramètres normaux	38
4.3. Courbes planes	42
Chapitre 5. Intégrales curvilignes	45
5.1. Définitions et propriétés élémentaires	45
5.2. Intégrale de forme différentielle exacte	47
5.3. Formule de Riemann-Green dans le plan	48
5.4. Intégrale de forme différentielle fermée dans \mathbb{R}^2	52
5.5. Formule du changement de variables pour les intégrales doubles	55

CHAPITRE 1

Équations différentielles

1.1. Généralités

Une **équation différentielle ordinaire** est une équation portant sur les dérivées d'une fonction. La forme générale d'une **équation différentielle ordinaire du premier ordre** est

$$(1.1.1) \quad F(t, x, x') = 0;$$

ici t est une variable réelle, x est une fonction inconnue de t et x' est sa dérivée par rapport à t . La fonction F est prescrite et le **problème** est de déterminer les fonctions x qui satisfont à l'équation donnée. L'équation s'appelle **ordinaire**, car la fonction à déterminer est une fonction d'une **variable**. L'adjectif **différentielle** fait référence au fait que l'équation contient certaines dérivées de x , en l'occurrence seulement la dérivée premier d'où la qualification supplémentaire **du premier ordre**. Ainsi, une équation du type

$$(1.1.2) \quad F(t, x, x', \dots, x^{(n)}) = 0;$$

s'appelle une **équation différentielle ordinaire d'ordre n** .

Les équations contenant des fonctions inconnues de plusieurs variables réelles et leurs dérivées partielles sont appelées les **équations aux dérivées partielles**.

Un **système d'équation différentielles ordinaires du premier ordre** est donné par

$$(1.1.3) \quad F_j(t, x_1, \dots, x_N, x'_1, \dots, x'_N) = 0, \quad j = 1, \dots, N;$$

où il s'agit de la détermination de N fonctions inconnues x_1, \dots, x_N d'une variable réelle t satisfait à (1.1.3). C'est une généralisation évidente de (1.1.1) à $N \geq 1$. Il est clair que (1.1.2) possède aussi une telle généralisation

$$(1.1.4) \quad F_j(t, x_1, \dots, x_N, x'_1, \dots, x'_N, \dots, x_1^{(n)}, \dots, x_N^{(n)}) = 0, \quad j = 1, \dots, N.$$

En posant

$$F = (F_1, \dots, F_N), \quad x = (x_1, \dots, x_N), \quad x^{(i)} = (x_1^{(i)}, \dots, x_N^{(i)})$$

on voit que (1.1.3) et (1.1.4) prennent les mêmes formes que (1.1.1) et (1.1.2).

Nous étudierons les équations (1.1.1) et (1.1.3) seulement lorsqu'elles sont résolues par rapports aux dérivées premières, autrement dit, les systèmes d'équations différentielles ordinaires du premier ordre étudiés seront de la forme

$$(1.1.5) \quad x' = f(t, x),$$

où

$$x = (x_1, \dots, x_N), \quad f = (f_1, \dots, f_N).$$

Le même pour l'équation d'ordre n

$$(1.1.6) \quad x^{(n)} = F(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}).$$

Une fonction $u : I \rightarrow \mathbb{R}^N$, I étant un intervalle de \mathbb{R} , s'appelle une **solution** de (1.1.5) si $u'(t)$ existe pour tout $t \in I$ et

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad t \in I;$$

il est sous-entendu que, pour tout $t \in I$, $(t, u(t))$ est dans le domaine de définition de f .

Réduire au système d'ordre 1. On peut réduire le système (1.1.6) d'ordre n à un système d'ordre 1 comme suivant : Posons $Y = (x(t), x'(t), \dots, x^{(n-1)}(t))$, c'est l'application inconnue de I dans $\mathbb{R}^{n \times N}$. Posons encore :

$$\hat{F}(t, x, x_1 \dots, x_{n-1}) = (x_1, \dots, x_{n-1}, F(t, x, x_1 \dots, x_{n-1})).$$

On a alors que le système (1.1.6) est équivalent au système suivant

$$(1.1.7) \quad Y' = \hat{F}(t, Y).$$

Précisément

$$\begin{aligned} x'(t) &= x_1(t), \\ x_1'(t) &= x_2(t), \\ &\dots \\ x_{n-2}'(t) &= x_{n-1}(t), \\ x_{n-1}'(t) &= F(t, x(t), x_1(t), \dots, x_{n-1}(t)). \end{aligned}$$

C'est un système d'ordre 1. On considérera désormais une équation du premier ordre.

$$y'(t) = F(t, y(t)).$$

où $F : I \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application continue, I un intervalle ouvert de \mathbb{R} et U un ouvert de \mathbb{R}^n .

Si $F(t, y) = A(t)y + B(t)$ où $A(t) = (a_{ij}(t))$ est une $n \times n$ matrice continue définie sur I , et $B(t) = (b_j(t))$ est un vecteur continue définie de I dans \mathbb{R}^n , on dit que

$$y'(t) = A(t)y(t) + B(t).$$

est un système linéaire non-homogène, et si $B(t) \equiv 0$, on dit que c'est un système linéaire homogène.

Pour avoir un problème dont la solution pourrait être unique, on introduit une condition supplémentaire, appelée condition initiale en physique, condition de Cauchy en mathématiques. Il s'agit de préciser la valeur de la solution y en un point $t_0 \in I$. Cela a un sens physique. En effet, si un phénomène physique est décrit par l'équation : $y'(t) = F(t, y(t))$, où $y(t)$ représente l'état du système à l'instant t , il faut bien, pour préciser l'évolution du système, connaître son état au départ ($t = 0$) ou à un certain moment ($t = t_0$). On donne la définition suivante.

Définition 1.1.1. *Le problème de Cauchy associé à l'équation différentielle du première ordre est le suivant :*

Étant donnés $t_0 \in I, y_0 \in U$, trouver un sous-intervalle J de I contenant t_0 et une application $y : J \rightarrow U$ de classe C^1 vérifiant

$$\begin{cases} y'(t) &= F(t, y(t)), \quad \forall t \in J \\ y(0) &= y_0. \end{cases}$$

On note cette solution par (J, y) .

1.2. Méthodes pratiques de résolution

Le but de cette section est de donner quelques méthodes pratiques de résolution de certains type d'équations différentielles non linéaire du premier ordre de la forme :

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Équation aux variables séparées. On consider le cas que la fonction $f(x, y)$ est une fonction de variable séparées, l'équation est alors de la forme

$$\frac{dy}{dx} = h(x)g(y).$$

On suppose que $h \in C^0(]a, b[), g \in C^0(]c, d[), g(y) \neq 0$, on sépare les variables,

$$\frac{dy}{g(y)} = h(x)dx.$$

Intègre cette équation, on a

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int h(x)dx + C,$$

ou bien

$$G(y) = H(x) + C,$$

où $G(y), H(x)$ sont respectivement les primitives de $\frac{1}{g(y)}, h(x)$.

Puisque $G'(y) = \frac{1}{g(y)} \neq 0$, la fonction G est inversible, on a alors les solutions générales suivantes :

$$y = G^{-1}(H(x) + C).$$

De plus si l'on demande la condition initiale $y(x_0) = y_0$, on a

$$y(x) = G^{-1}(H(x) + G(y_0) - H(x_0)).$$

Exemple 1.2.1. Considère l'équation

$$y' = y^2.$$

où $h(t) = 1$ définie sur \mathbb{R} , et $g(y) = y^2$ définie sur $] - \infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$. On a alors $G(y) = -y^{-1}, H(t) = t$. Si la condition initiale est $y(0) = y_0 > 0$, on obtient la solution

$$y(x) = (y_0^{-1} - t)^{-1}, \quad t \in] - \infty, y_0^{-1}[.$$

Si $y_0 < 0$, la solution est définie dans $[y_0^{-1}, +\infty[$. Si $y(0) = 0$, la discussion précédente n'est pas applicable mais on voit directement que $y(t) \equiv 0, t \in \mathbb{R}$ est une solution. précisément,

$$\begin{cases} y(t) \equiv 0, & \text{sur } \mathbb{R}, & \text{si } y_0 = 0 \\ y(t) = y_0/(1 - y_0(t - t_0)), & \text{sur }]-\infty, t_0 + 1/y_0[, & \text{si } y_0 > 0 \\ y(t) = y_0/(1 - y_0(t - t_0)), & \text{sur }]t_0 + 1/y_0, +\infty[, & \text{si } y_0 < 0. \end{cases}$$

On observe que l'intervalle maximal où une solution correspondante à la condition initiale $y(0) = y_0$ existe, dépend fortement de la valeur de y_0 ; la solution "explose" (tend vers $+\infty$ ou $-\infty$) lorsque t tend vers l'extrémité $y_0^{-1}, y_0 \neq 0$.

Le fait d'imposer une condition initiale n'entraîne pas nécessairement l'unicité de solution, voir l'exemple suivant :

Exemple 1.2.2. Le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = 2\sqrt{|y|}, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

admet une infinité de solution s'annulant en 0, à savoir, si $\beta \leq 0 \leq \alpha$,

$$y(t) = \begin{cases} 0, & \beta \leq t \leq \alpha \\ (t - \alpha)^2, & t \geq \alpha \\ -(t - \beta)^2, & t \leq \beta. \end{cases}$$

sont de solution.

Équations homogènes. On considère maintenant que la fonction $f(x, y)$ est une fonction homogène de l'ordre 0, c'est-à-dire

$$f(tx, ty) = f(x, y),$$

pour tout $t, x, y \in \mathbb{R}$. En choisissant $t = \frac{1}{x}$, on a

$$f(x, y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right).$$

L'équation est alors de la forme

$$y' = g\left(\frac{y}{x}\right).$$

On effectue maintenant un changement de fonction inconnue $u = \frac{y}{x}$, on a alors

$$y = ux, \quad y' = xy' + u,$$

l'équation différentielle est transformée en

$$\frac{du}{dx} = \frac{g(u) - u}{x}.$$

C'est une équation aux variables séparées, donc si $g(u) - u \neq 0$, i.e. $f(x, y) \neq \frac{y}{x}$ (ceci est déjà en forme de variables séparées), on a

$$\int \frac{du}{g(u) - u} = \log|x| - \log|C|,$$

et on a la solution générales

$$x = Ce^{\int \frac{du}{g(u) - u}}.$$

Exemple 1.2.3. Considère l'équation

$$\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}.$$

On pose $y = xu$, on a alors

$$x \frac{du}{dx} = 2\sqrt{u},$$

et

$$\frac{du}{2\sqrt{u}} = \frac{dx}{x},$$

d'où (avec $u = y/x$)

$$y = x(\log|x| + C)^2.$$

Il faut ajouter encore la solution $y = 0$ ($x \neq 0$).

On considère l'équation de la forme suivante :

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right).$$

Si $c = c_1 = 0$, c'est une équation homogène. On suppose donc $(c, c_1) \neq (0, 0)$.

Cas 1) :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Introduire les nouvelles variables t et u :

$$x = t + \alpha, \quad y = u + \beta$$

où α, β 2 constants à déterminer. On a alors

$$\frac{du}{dt} = f\left(\frac{at + bu + a\alpha + b\beta + c}{a_1t + b_1u + a_1\alpha + b_1\beta + c_1}\right).$$

Parceque $\Delta \neq 0$, il exists α, β qui sont solutions de l'équation suivante :

$$\begin{cases} a\alpha + b\beta + c = 0, \\ a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0 \end{cases}$$

Ainsi qu'on obtient une equation homogène

$$\frac{du}{dt} = f\left(\frac{at + bu}{a_1t + b_1u}\right).$$

Cas 2) :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \lambda.$$

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{\lambda(ax + by) + c_1}\right).$$

Posont

$$z = ax + by, \quad \frac{dz}{dx} = a + b\frac{dy}{dx},$$

donc

$$\frac{dz}{dx} = a + bf\left(\frac{z + c}{\lambda z + c_1}\right),$$

C'est une équation aux variables séparées.

Exemple 1.2.4. Considère l'équation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - x - 2}{x + y + 4}.$$

Posont

$$x = t + \alpha, \quad y = u + \beta,$$

on a alors

$$\frac{du}{dt} = \frac{u - t + \beta - \alpha - 2}{t + u + \alpha + \beta + 4}.$$

Résoudre l'équation linéaire

$$\beta - \alpha - 2, \quad \alpha + \beta + 4$$

avec $\alpha = -3, \beta = -1$. Pour l'équation

$$\frac{du}{dt} = \frac{u - t}{t + u}.$$

La solution générale est

$$\sqrt{u^2 + t^2} = Ce^{-\operatorname{tg}^{-1} \frac{u}{t}},$$

retourner aux variables initiales, on a

$$\sqrt{(y+1)^2 + (x+3)^2} = Ce^{-\operatorname{tg}^{-1} \frac{y+1}{x+3}}.$$

1.3. Équation scalaire linéaire du premier ordre

On étudie l'équation scalaire du premier d'ordre suivante :

$$(1.3.1) \quad \frac{dx}{dt} = p(t)x + q(t),$$

où $p(t), q(t)$ deux fonctions continues définies sur un intervalle $]a, b[$.

Équation homogène. Si $q(t) \equiv 0$, on a une équation dite *homogène* :

$$(1.3.2) \quad \frac{dx}{dt} = p(t)x.$$

Proposition 1.3.1. Soit S_1 l'ensemble des solutions de l'équation (1.3.2), alors S_1 est un espace vectoriel.

Preuve : Soient $x_1, x_2 \in S_1, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Alors

$$x_1' = p(t)x_1, \quad x_2' = p(t)x_2, \quad \forall t \in I,$$

donc

$$(\alpha x_1 + \beta x_2)' = p(t)(\alpha x_1 + \beta x_2), \quad \forall t \in I$$

d'où $(\alpha x_1 + \beta x_2) \in S_1$, donc S_1 est un espace vectoriel.

On essaie de déterminer l'espace S_1 . Si $x(t) \neq 0$ est une solution, on a

$$\frac{dx}{x} = p(t)dt,$$

intègre cette équation, on a

$$\log |x| = \int p(t)dt + \log |C|.$$

On a donc montré que si $x(t) \neq 0$ est une solution de l'équation (1.3.2), elle est de la forme

$$(1.3.3) \quad x = Ce^{\int p(t)dt},$$

avec C une constante non nulle. Il est évident que $x(t) \equiv 0$ est une solution de l'équation (1.3.2).

Proposition 1.3.2. *Soit (J, x) une solution de l'équation (1.3.2) telle que $t_0 \in J, x(t_0) = 0$, on a alors $x(t) \equiv 0$ pour tout $t \in J$.*

Preuve : Supposons au contraire qu'il existe $t_1 \in J$ avec $x(t_1) \neq 0$, alors dans un voisinage J_1 de t_1 , on a que $x(t) \neq 0$ pour tout $t \in J_1$. Soit J_1 intervalle maximale possédant cette propriété. On a que, sur J_1 , $x(t)$ est de la forme de (1.3.3) avec $C \neq 0$, dans ce cas-là, par la continuité de $x(t)$, il est impossible égale 0 au extrémité de J_1 .

Un calcul direct montre que pour tout $C \in \mathbb{R}$, la fonction (1.3.3) est une solution de l'équation (1.3.2). On a ainsi montré que (1.3.3) donne toutes les solutions de l'équation (1.3.2). Ceci implique que S_1 est un espace vectoriel de dimension 1.

Soient $a < t_0 < b, x_0 \in \mathbb{R}$, on cherche des solutions spéciaux vérifiant la condition initiale $x(t_0) = x_0$, on a

$$x(t_0) = Ce^{P(t_0)}, \quad P(t) = \int p(t)dt, \quad C = x_0 e^{-P(t_0)},$$

d'où, pour le problème de Cauchy, l'unique solution est :

$$x(t) = x_0 e^{P(t)-P(t_0)} = x_0 e^{\int_{t_0}^t p(t)dt}.$$

Variation de constante pour l'équation non homogène

On étudie maintenant l'équation (1.3.1). On a

Proposition 1.3.3. *Soit x_1 une solution spéciale de l'équation (1.3.1), alors toutes les solutions de l'équation (1.3.1) peut être écrire sous la forme suivante*

$$x(t) = x_1(t) + x_0(t),$$

où $x_0(t)$ est solution de l'équation homogène (1.3.2).

Puisqu'on a déjà trouvé toutes les solutions de l'équation homogène, la résolution de l'équation non homogène est réduit à trouver une solution spéciale de l'équation non homogène.

Démonstration : Soit $x(t)$ une solution de l'équation (1.3.1), on a alors

$$x'(t) = p(t)x(t) + q(t), \quad x_1'(t) = p(t)x_1(t) + q(t),$$

d'où

$$\frac{(x - x_1)(t)}{dt} = p(t)(x - x_1)(t),$$

on a donc que $x(t) - x_1(t)$ est une solution de l'équation homogène (1.3.2), notée par $x_0(t)$, on a montré que $x(t) = x_1(t) + x_0(t)$.

Réciproquement, supposons que $x_1(t)$ est une solution de l'équation non-homogène (1.3.1) et que $x_0(t)$ est une solution de l'équation homogène (1.3.2). Posons $x(t) = x_1(t) + x_0(t)$, on a alors

$$x'(t) = x_1'(t) + x_0'(t) = (p(t)x_1(t) + q(t)) + p(t)x_0(t) = p(t)x(t) + q(t).$$

On a donc démontré la proposition.

On cherche maintenant une solution spéciale de l'équation non homogène (1.3.1) par la méthode dite "variation de constante", i. e. on essaie la solution de la forme suivante

$$x(t) = C(t)e^{\int p(t)dt}.$$

La fonction inconnue $C(t)$ vérifie alors l'équation suivante :

$$\frac{dC(t)}{dt}e^{\int p(t)dt} + C(t)p(t)e^{\int p(t)dt} = p(t)C(t)e^{\int p(t)dt} + q(t),$$

d'où

$$\frac{dC(t)}{dt} = q(t)e^{-\int p(t)dt}.$$

Intégrer cette équation, on a

$$C(t) = \int q(t)e^{-\int p(t)dt} dt.$$

On a trouvé une solution de l'équation non homogène (1.3.1)

$$x_1(t) = e^{\int p(t)dt} \int q(t)e^{-\int p(t)dt} dt.$$

Et les solutions générales de l'équation non homogène (1.3.1) est

$$x(t) = e^{\int p(t)dt} \left(C + \int q(t)e^{-\int p(t)dt} dt \right).$$

Si l'on demande que la solution vérifiée encore la condition initiale $x(t_0) = x_0$, on a alors

$$x(t) = e^{\int_{t_0}^t p(s)ds} \left(x_0 + \int_{t_0}^t q(s)e^{-\int_{t_0}^s p(\tau)d\tau} ds \right).$$

Équation de Bernoulli. L'équation de Bernoulli est l'équation de la forme

$$\frac{dy}{dx} = p(x)y + q(x)y^n, \quad n \neq 0, 1,$$

on peut transformer cette équation en une équation linéaire par un changement de variable. Pour $y \neq 0$, on a

$$y^{-n} \frac{dy}{dx} = p(x)y^{1-n} + q(x), \quad \frac{1}{1-n} \frac{dy^{1-n}}{dx} = p(x)y^{1-n} + q(x).$$

Posons $z = y^{1-n}$, on obtient l'équation linéaire suivante :

$$z' = (1-n)p(x)z + (1-n)q(x).$$

Exemple :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4}{x}y + xy^{1/2}, \quad (y > 0, x \neq 0).$$

C'est une équation de Bernoulli avec $n = 1/2$, posons $z = y^{1/2}$, on a

$$\frac{dz}{dx} = \frac{2}{x}z + \frac{1}{2}x.$$

On a alors

$$z = e^{\int \frac{2}{x} dx} \left(C + \int \frac{x}{2} e^{-\int \frac{2}{x} dx} dx \right) = x^2 \left(C + \frac{1}{2} \log |x| \right),$$

Les solutions générales de l'équation de Bernoulli est

$$y = x^4 \left(C + \frac{1}{2} \log |x| \right)^2.$$

1.4. Le lemme de Gronwall

C'est un lemme élémentaire mais extrêmement utile dans la théorie d'analyse.

Lemme 1.4.1. *Soit φ une fonction continue de $[a, b]$ dans \mathbb{R}_+ et $c \in [a, b]$. Supposons qu'il existe des constantes positives A, B telles que*

$$\varphi(t) \leq A + B \left| \int_c^t \varphi(s) ds \right|, \quad \forall t \in [a, b].$$

Alors

$$\varphi(t) \leq Ae^{B|t-c|}, \quad \forall t \in [a, b].$$

Preuve : Supposons $t \geq c$. Posons

$$F(t) = A + B \int_c^t \varphi(s) ds,$$

alors $F \in C^1$ et $\varphi(t) \leq F(t)$ pour tout $t \in [c, b]$. On a de plus $F'(t) = B\varphi(t) \leq BF(t)$. On en déduit

$$\frac{d}{dt} \left(e^{-Bt} F(t) \right) = e^{-Bt} \left(F'(t) - BF(t) \right) \leq 0,$$

donc

$$e^{-Bt} F(t) \leq e^{-Bc} F(c) = Ae^{-Bc}, \quad \forall t \in [c, b]$$

d'où

$$\varphi(t) \leq F(t) \leq Ae^{B(t-c)}, \quad \forall t \in [c, b].$$

Pour $a \leq t \leq c$, on pose

$$G(t) = A + B \int_t^c \varphi(s) ds,$$

alors $G \in C^1$ et $\varphi(t) \leq G(t)$ pour tout $t \in [a, c]$. On a de plus $G'(t) = -B\varphi(t) \geq -BG(t)$. On en déduit

$$\frac{d}{dt} \left(e^{Bt} G(t) \right) = e^{Bt} \left(G'(t) + BG(t) \right) \geq 0,$$

donc

$$e^{Bt} G(t) \leq e^{Bc} G(c) = Ae^{Bc}, \quad \forall t \in [a, c]$$

d'où

$$\varphi(t) \leq G(t) \leq Ae^{B(c-t)}, \quad \forall t \in [a, c].$$

1.5. Équation linéaire du second ordre à coefficients constants

On étudie dans cette section l'équation linéaire du second ordre homogène à coefficients constants :

$$(1.5.1) \quad y'' + ay' + by = 0,$$

où a, b sont 2 constants réelles.

Proposition 1.5.1. *Soit S_2 l'ensemble des solutions de l'équation (1.5.1), alors S_2 est un espace vectoriel (de dimension 2).*

(Preuve de cette proposition est un exercice).

On cherche des solutions de formes $e^{\lambda x}$, alors λ satisfait l'équation caractéristique

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0.$$

Soit $\Delta = a^2 - 4b$ son discriminant, on a 3 cas :

1er cas : $\Delta > 0$, l'équation caractéristique admet 2 racines réelles et distinctes $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, alors

$$S_2 = \left\{ \alpha e^{\lambda_1 x} + \beta e^{\lambda_2 x}; \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

2e cas : $\Delta = 0$, l'équation caractéristique admet une racine réelle double $-\frac{a}{2}$, alors

$$S_2 = \left\{ (\alpha x + \beta) e^{-\frac{a}{2}x}; \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

3e cas : $\Delta < 0$, l'équation caractéristique admet 2 racines complexes $-\frac{a}{2} \pm ic$ avec $c = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} \neq 0$, alors

$$S_2 = \left\{ e^{-\frac{a}{2}x} (\alpha \cos(cx) + \beta \sin(cx)); \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

CHAPITRE 2

Formes différentielles du premier ordre

La notion de forme différentielle va nous permettre de définir l'intégrale d'une fonction dont le domaine de définition est une variété de \mathbb{R}^n , courbe, surface, etc. Nous étudions, dans cette partie de cours, seulement les formes différentielles de degré un, ce qui nous permettra de définir la notion d'intégrale curviligne.

2.1. Définitions et notations

Soit f une fonction de classe C^k , $k \geq 1$ définie sur un ouvert U de \mathbb{R}^n , on sait que la différentielle de f est la forme

$$(2.1.1) \quad df(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) dx_j,$$

où (dx_1, \dots, dx_n) est la base duale de (e_1, \dots, e_n) de \mathbb{R}^n , c'est-à-dire les projecteurs de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} :

$$\forall h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n, \quad (dx_j)(h) = h_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Donc $df(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ une forme linéaire sur \mathbb{R}^n . Nous donnons maintenant une définition générale :

Définition 2.1.1. Soient U un ouvert de \mathbb{R}^n , $k \geq 1$ un entier. On appelle forme différentielle de degré un et de classe C^k sur U toute application $\omega : U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$, telle qu'il existe n fonctions $a_j \in C^k(U)$, $j = 1, \dots, n$ telles que

$$(2.1.2) \quad \omega(x) = \sum_{j=1}^n a_j(x) dx_j, \quad \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in U.$$

Les fonctions a_j , $j = 1, \dots, n$ sont appelées les coefficients de la forme différentielle ω .

On ne précise suivant pas la classe de forme différentielle, et dit simplement une forme de degré un.

Définition 2.1.2. Une forme différentielle ω de degré un est dite exacte si et seulement s'il existe une fonction différentiable f telle que $df = \omega$. une telle fonction f est appelée une primitive de ω .

Toutes les formes différentielles de degré un sur U constituent de manière évidente un espace vectoriel, on désigne par $F^1(U)$.

Elles constituent aussi un module sur l'anneau $C^k(U)$ par multiplication

$$f\omega = \sum_{j=1}^n f a_j dx_j.$$

Toutes les formes différentielles exactes de degré un sur U constituent aussi un espace vectoriel.

La relation $df = \omega$ est équivalente à

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = a_j(x), \quad j = 1, \dots, n.$$

Exemple : la forme différentielle $\omega : (x_1, \dots, x_n) \rightarrow \sum_{j=1}^n x_j dx_j$ est exacte sur \mathbb{R}^n , et admet comme primitive sur \mathbb{R}^n , $f(x) = \frac{1}{2}|x|^2$.

Soient $f \in C^k(U)$, $k \geq 2$ et C une constante, on a alors $df = d(f+C)$. Réciproquement on a

Proposition 2.1.1. Soient U un ouvert de \mathbb{R}^n et ω une forme différentielle de degré un sur U . Si U est connexe et ω est exacte, alors ω admet par définition au moins une primitive f sur U , et l'ensemble des primitives de ω sur U est $\{f + C; C \in \mathbb{R}\}$.

Démonstration : Soient $f_1, f_2 : U \rightarrow \mathbb{R}$ deux primitives de ω sur U . Alors $f_1 - f_2$ est différentiable, et $d(f_1 - f_2) = 0$ implique

$$\partial_{x_j}(f_1 - f_2)(x) = 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Comme U est connexe, $f_1 - f_2$ est constante sur U .

2.2. Transposition de forme différentielle

Définition 2.2.1. Soient $U_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}, U_2 \subset \mathbb{R}^{n_2}$ deux ouverts, $\varphi : U_1 \rightarrow U_2$ une application de classe C^{k+1} , $k \geq 1$ (i.e. $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_{n_2}(x))$, $\varphi_j \in C^{k+1}(U_1)$). Si $\omega(y) = \sum_{j=1}^{n_2} A_j(y) dy_j$ est une forme différentielle de degré un de classe C^k sur U_2 , la transposée par φ de la forme ω est la forme $\varphi^*\omega$ définie sur U_1 par

$$(2.2.1) \quad \varphi^*\omega(x) = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} A_j(\varphi(x)) \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x_i} dx_i,$$

soit

$$\varphi^*\omega = \sum_{j=1}^{n_2} (A_j \circ \varphi) d\varphi_j.$$

la forme différentielle $\varphi^*\omega$ est aussi appelée l'image réciproque de la forme ω par φ , i.e. on a une application linéaire $\varphi^* : F^1(U_2) \rightarrow F^1(U_1)$.

On a immédiatement les résultats suivants :

Si f est une fonction définie sur U_2 , on a

$$\varphi^*(f\omega) = (f \circ \varphi)\varphi^*\omega.$$

En effet,

$$\begin{aligned} \varphi^*(f\omega)(x) &= \varphi^* \left(\sum_{j=1}^{n_2} f(y) A_j(y) dy_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} f(\varphi(x)) A_j(\varphi(x)) \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x_i} dx_i \\ &= (f \circ \varphi)(x) \varphi^*\omega. \end{aligned}$$

Si $\omega = df$ est une forme différentielle exacte, on a alors

$$\varphi^*(df) = d(f \circ \varphi).$$

En effet,

$$\begin{aligned} \varphi^*(df)(x) &= \varphi^* \left(\sum_{j=1}^{n_2} \frac{\partial f(y)}{\partial y_j} dy_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \frac{\partial f}{\partial y_j}(\varphi(x)) \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x_i} dx_i \\ &= \sum_{j=1}^{n_2} \frac{\partial f}{\partial y_j}(\varphi(x)) d\varphi_j = d(f \circ \varphi). \end{aligned}$$

Pour des applications composées, on a

Proposition 2.2.1. *Soient $U_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$, $U_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$, $U_3 \in \mathbb{R}^{n_3}$, des ouverts, $\varphi : U_1 \rightarrow U_2$, et $\psi : U_2 \rightarrow U_3$ des applications de classe C^{k+1} , pour ω une forme différentielle de degré un sur U_3 , on a*

$$(2.2.2) \quad (\psi \circ \varphi)^* \omega = \varphi^*(\psi^* \omega),$$

soit symboliquement $(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$.

Démonstration : Soit $\omega(z) = \sum_{k=1}^{n_3} A_k(z) dz_k$, on a alors

$$\begin{aligned} \psi^* \omega(y) &= \sum_{k=1}^{n_3} A_k(\psi(y)) d\psi_k \\ &= \sum_{j=1}^{n_2} \sum_{k=1}^{n_3} A_k(\psi(y)) \frac{\partial \psi_k(y)}{\partial y_j} dy_j, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \varphi^*(\psi^* \omega)(x) &= \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \sum_{k=1}^{n_3} A_k(\psi(\varphi(x))) \frac{\partial \psi_k(\varphi(x))}{\partial y_j} \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x_i} dx_i \\ &= \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{k=1}^{n_3} A_k(\psi(\varphi(x))) \frac{\partial \psi_k(\varphi(x))}{\partial x_i} dx_i = (\psi \circ \varphi)^* \omega. \end{aligned}$$

Ces deux proposition nous permettent de faire des changements de variables pour les formes différentielles, dans beaucoup de cas ce sera pour simplifier le calcul.

2.3. Formes différentielles fermées

Définition 2.3.1. *Soit $\omega(x) = \sum_{j=1}^n A_j(x) dx_j$ une forme différentielle sur U . On dit que ω est fermée sur U si et seulement si*

$$(2.3.1) \quad \frac{\partial A_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial A_j}{\partial x_i}(x), \quad i, j = 1, \dots, n; \quad \forall x \in U.$$

On a immédiatement le résultat suivant :

Proposition 2.3.1. *Soient U un ouvert de \mathbb{R}^n , ω une forme différentielle sur U . Si ω est exacte sur U , alors ω est fermé sur U .*

Démonstration : En notant A_1, \dots, A_n les coefficients de ω , puisque ω est exacte, il existe $f \in C^{k+1}(U)$, $k \geq 1$ tel que

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = A_j(x), \quad j = 1, \dots, n.$$

Comme f est au moins deux fois continuellement différentiable sur U , d'après le théorème de Schwarz

$$\frac{\partial A_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) (x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial A_j}{\partial x_i}(x), \quad i, j = 1, \dots, n; \quad \forall x \in U.$$

La réciproque de la proposition 2.3.1 n'est généralement pas vraie, mais pour certain domaine U , on a une réponse positive.

Définition 2.3.2. *Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n , $A = (a_1, \dots, a_n) \in U$, on dit que U est étoilé par rapport à A si et seulement si pour tout $M = (m_1, \dots, m_n) \in U$*

$$[AM] = \{P = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n; \exists \lambda \in [0, 1], P = \lambda A + (1 - \lambda)M\} \subset U.$$

On dit que U est étoilé si et seulement s'il existe un point $A \in U$ tel que U soit étoilé par rapport à A .

Théorème 2.3.1. (Théorème de Poincaré)

Soient U un ouvert de \mathbb{R}^n et ω une forme différentielle sur U . Si U est étoilé et si ω est fermée sur U , alors ω est exacte sur U .

Démonstration : Notons $\omega(x) = \sum A_j(x) dx_j$, et $a = (a_1, \dots, a_n) \in U$ tel que U soit étoilé par rapport à a . On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \int_0^1 \sum_{j=1}^n (x_j - a_j) A_j(a + t(x - a)) dt.$$

Nous allons montrer que f est une primitive de ω sur U .

Comme U est étoilé par rapport à a , la fonction

$$\sum_{j=1}^n (x_j - a_j) A_j(a + t(x - a))$$

est de classe C^1 sur $[0, 1] \times U$. Donc le théorème de dérivation sous le signe \int_0^1 montre que les dérivées partielles de f sont de classe C^1 et

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \int_0^1 [A_i(a + t(x - a)) + \sum_{j=1}^n t(x_j - a_j) \frac{\partial A_j}{\partial x_i}(a + t(x - a))] dt.$$

En utilisant l'hypothèse

$$\frac{\partial A_j}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial A_i}{\partial x_j}(x), \quad \forall x \in U,$$

on obtient par intégration par parties

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 \left[\sum_{j=1}^n t(x_j - a_j) \frac{\partial A_j}{\partial x_i}(a + t(x - a)) \right] dt \\
 &= \int_0^1 \left[\sum_{j=1}^n t(x_j - a_j) \frac{\partial A_i}{\partial x_j}(a + t(x - a)) \right] dt \\
 &= [tA_i(a + t(x - a))]_0^1 - \int_0^1 A_i(a + t(x - a)) dt \\
 &= A_i(x) - \int_0^1 A_i(a + t(x - a)) dt.
 \end{aligned}$$

Donc $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = A_i(x)$. i.e. f est une primitive de ω sur U , et ω est alors exacte sur U .

Méthode pratique

Pour une forme différentielle fermée de degré 1, on calcule maintenant leurs primitives. Sur \mathbb{R}^2 , il y a une méthode générale : Soit $\omega = M(x, y)dx + N(x, y)dy$ une forme différentielle définie sur un ouvert étoilé de \mathbb{R}^2 , si ω est fermée, alors d'après le théorème de Poincaré, il existe une fonction $f(x, y)$ telle que

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = M(x, y), \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = N(x, y),$$

donc

$$f(x, y) = \int_{x_0}^x M(x, y)dx + \varphi(y),$$

où φ est indépendant de x et différentiables en y , (x_0, y_0) est le point pour lequel le domaine de définition de ω est étoilé. D'autre côté, on a

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int_{x_0}^x M(x, y)dx + \varphi'(y) = N(x, y),$$

comme ω est fermée, on a

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x},$$

d'où

$$\int_{x_0}^x \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} dx + \varphi'(y) = N(x, y), \quad [N(x, y)]_{x_0}^x + \varphi'(y) = N(x, y),$$

$$\varphi'(y) = N(x_0, y), \quad \varphi(y) = \int_{y_0}^y N(x_0, y)dy + C.$$

On a ainsi obtenu deux **formules pour calculer les primitives** de forme différentiel fermée sur un ouvert étoilé de \mathbb{R}^2 .

$$(2.3.2) \quad f(x, y) = \int_{x_0}^x M(x, y)dx + \int_{y_0}^y N(x_0, y)dy + C,$$

ou bien

$$(2.3.3) \quad f(x, y) = \int_{x_0}^x M(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y N(x, y) dy + C.$$

Dans le calcul pratique, il faut bien choisir (x_0, y_0) pour simplifier le calcul.

Exemple : $\omega = xydx + \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{y}\right) dy$, on a

$$M(x, y) = xy, \quad N(x, y) = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{y}\right), \quad \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = x.$$

Donc ω est fermée sur tous les ouverts étoilés de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0); x \in \mathbb{R}\}$, on prends $(x_0, y_0) = (0, 1)$, on a les primitives de ω avec la première formule

$$f(x, y) = \int_0^x xy dx + \int_1^y \frac{1}{y} dy = \frac{x^2 y}{2} + \log y + C.$$

En utilisant la deuxième formule, on a

$$f(x, y) = \int_0^x x dx + \int_1^y \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{y}\right) dy = \frac{x^2}{2} + \left(\frac{x^2 y}{2} - \frac{x^2}{2} + \log y\right) + C,$$

on trouve les mêmes primitives.

Facteurs intégrants

On considère toujours des formes différentielles de degré un à deux variables. Pour une forme différentielle non fermée, on va essayer de trouver des facteurs intégrants, i. e. pour une forme $\omega = M(x, y)dx + N(x, y)dy$, déterminer une fonction $\varphi(x, y)$ telle que $\varphi\omega$ soit fermée, i. e. vérifie la condition

$$\frac{\partial(\varphi M)}{\partial y} = \frac{\partial(\varphi N)}{\partial x},$$

équivalent à

$$N \frac{\partial \varphi}{\partial x} - M \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) \varphi.$$

C'est une équation aux dérivées partielles pour inconnue φ . *D'après la théorie d'équation aux dérivées partielles, la solution φ existe. C'est-à-dire que pour des formes différentielles de degré un à deux variables, il existe toujours des facteurs intégrants.* Mais c'est seulement un résultat théorique, dans le pratique, pour trouver un facteur intégrant, c'est pas toujours très facile.

Exemple : Soit $\omega = (2xy^2 + e^x y)dx - e^x dy$, déterminer un facteur intégrant de ω .

On a

$$\omega = y^2 \left(2x dx + \frac{e^x y dx - e^x dy}{y^2} \right) = y^2 d \left(x^2 + \frac{e^x}{y} \right),$$

alors $y^{-2}\omega$ est une forme exacte, donc fermée sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0); x \in \mathbb{R}\}$. on a donc trouvé un facteur intégrant $\varphi(x, y) = y^{-2}$.

CHAPITRE 3

Arcs géométriques

Ce chapitre est consacré à l'étude de la notion d'arc dans un espace euclidien \mathbb{R}^n . Pour simplifier, nous donnerons uniquement les exemples et les démonstrations dans \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 .

3.1. Arcs géométriques

En mécanique, on est naturellement amené à considérer un point qui varie avec le temps. On étudie ici cette situation d'une manière abstraite.

Définition 3.1.1. Soit I un intervalle de \mathbb{R} . Une application continue $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ s'appelle un chemin de \mathbb{R}^n . Si f est de classe C^k , $k \geq 0$, on dit qu'on a un chemin de classe C^k . Si I est un intervalle fermé borné $[a, b]$, on dit que le chemin est compact, $f(a)$ et $f(b)$ sont appelés les extrémités du chemin. Si $f(a) = f(b)$, on dit que le chemin est fermé.

La variable t s'appelle le paramètre, parfois le temps.

Dans l'espace \mathbb{R}^n , on a l'origine 0 , et la base canonique $e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)$, alors $f(t)$ a des coordonnées qui sont des fonctions réelles de t , soit $f(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t))$. On dit que le chemin est défini par les équations

$$(3.1.1) \quad x_1 = f_1(t), \dots, x_n = f_n(t), \quad t \in I.$$

On dit que le chemin f est de classe C^k , si et seulement si les fonctions $f_j, j = 1, \dots, n$ sont de classe $C^k(I)$. On dit que le chemin $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ est de classe C^k **par morceaux**, s'il existe une subdivision de $[a, b]$, soit $a = a_0 < a_1 < \dots < a_m = b$ telle que la restriction de f à chaque intervalle fermé $[a_i, a_{i+1}], i = 1, \dots, m$ soit de classe C^k .

Définition 3.1.2. Deux chemins $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $g : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont dits C^k -équivalents, s'il existe une bijection $\theta : I \rightarrow J$, de classe C^k ainsi que sa réciproque, telle que $f = g \circ \theta$.

“Les chemins f, g sont C^k -équivalents” est une **relation d'équivalence** sur l'ensemble des chemins de \mathbb{R}^n . Il est clair que deux chemins C^k -équivalents ont même image dans \mathbb{R}^n . Mais la réciproque est inexacte : par exemple, les deux chemins de $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ suivants :

$$f : t \rightarrow e^{it}; \quad g : t \rightarrow e^{2it},$$

définis sur $[0, 2\pi]$ ont même image, à savoir le cercle unité de centre 0 . Mais ils ne sont même pas C^0 -équivalents. En effet, le premier n'a qu'un point multiple (le point $f(0) = f(2\pi)$), alors que le second a plusieurs points multiples.

La donnée d'une classe γ de chemins équivalents détermine donc un ensemble A (image commune des chemins de γ), ainsi qu'une certaine structure sur A (mode de parcours de A).

Définition 3.1.3. Une classe γ de chemins C^k -équivalents est appelée un **arc géométrique de classe C^k** . Les chemins de la classe γ sont appelés *représentations paramétriques admissibles de γ* (en abrégé : *paramétrisation*). leur image commune est appelée le *support de γ* et sera notée $\text{supp}(\gamma)$, on dit aussi une *courbe*.

On voit facilement que deux chemins C^k -équivalents admettent les mêmes points pour extrémités. Ces points ne dépendent donc que de l'arc géométrique γ défini par les chemins considérés, chacun d'eux est appelé une **extrémité de l'arc**. Si un chemin est fermé, on dit que l'arc est **fermé**.

Exemple 3.1.1. Le chemin défini par les équations

$$x = t, \quad y = g(t), \quad t \in I$$

a pour ensemble de points le graphe de la fonction g .

Exemple 3.1.2. Soient $(x_0, y_0, z_0), (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Alors les équations

$$x = x_0 + at, \quad y = y_0 + bt, \quad z = z_0 + ct, \quad t \in \mathbb{R}$$

sont une représentation paramétrique de la droite dans \mathbb{R}^3 qui passe par le point (x_0, y_0, z_0) et parallèle au vecteur de coordonnées (a, b, c) .

Exemple 3.1.3. Soient a, b deux constantes > 0 . Considérons dans \mathbb{R}^2 , l'ellipse de l'équations

$$E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}.$$

Posons $x = a \cos t, y = b \sin t$. Alors E admet une représentation paramétrique

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t, \quad t \in I = [-\pi, \pi[.$$

L'application $t \rightarrow (x(t), y(t))$ de $[-\pi, \pi[$ dans E est bijective.

Exemple 3.1.4. .

Soient a, b deux constantes > 0 . Considérons F , l'hyperbole d'équations

$$F = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}.$$

Comme x ne s'annule en aucun point de F , F admet aussi pour équation

$$\frac{a^2 y^2}{b^2 x^2} + \frac{a^2}{x^2} = 1.$$

Posons $\frac{a}{x} = \cos t, \frac{ay}{bx} = \sin t$. Donc F admet une représentation paramétrique

$$x = \frac{a}{\cos t}, \quad y = b \operatorname{tg} t, \quad t \in I_1 =] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \text{ ou } t \in I_2 =]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[.$$

Autre méthode l'équation de F peut s'écrire

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = 1.$$

Pour que (x, y) soit sur F , il faut et il suffit qu'il existe un nombre réel $s \neq 0$ tel que

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = s, \quad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \frac{1}{s},$$

d'où une représentation paramétrique

$$x = \frac{1}{2}a \left(s + \frac{1}{s}\right), \quad y = \frac{1}{2}b \left(s - \frac{1}{s}\right), \quad t \in I_1 =]-\infty, 0[[\text{ ou } t \in I_2 =]0, +\infty[.$$

Ordre de multiplicité, arcs simples

Soit γ un arc géométrique et M un point de son support. Désignons par f une paramétrisation de γ , comme les changements de paramètre étant bijectifs, le cardinal de l'ensemble $f^{-1}(M)$ est indépendant du choix de f . Si ce cardinal est fini, l'entier $p = \text{car}(f^{-1}(M))$ est appelé **l'ordre de multiplicité du point** M . Si $p = 1$, le point M est dit **simple**.

Définition 3.1.4. *Un arc γ est dit simple si tous les points de $\text{supp}(\gamma)$ sont simples, i. e. si toute paramétrisation de γ est une application injective.*

Exemple 3.1.5. L'arc de \mathbb{R}^2 défini par $x = t^2, y = t^4, t \in \mathbb{R}$ a tous ses points doubles sauf l'origine qui est un point simple.

Paramétrisation cartésienne

Nous dirons qu'une paramétrisation f d'un arc γ est **cartésienne** s'il existe un repère \mathcal{R} et une valeur de $1 \leq i \leq n$ telle que, pour tout $t \in I$, la i -ième coordonnée du point $f(t)$ soit égale à t . Une paramétrisation cartésienne est donc une paramétrisation telle que, dans un repère convenable, le paramètre soit égale à l'une des coordonnées.

Une telle paramétrisation est évidemment injective. Tout arc de \mathbb{R}^n défini par une paramétrisation cartésienne est donc simple.

Définition 3.1.5. *Un arc fermé γ défini par une paramétrisation $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ vérifiant $f(a) = f(b)$ sera appelé un arc fermé simple, si la restriction de f à l'intervalle semi-ouvert $[a, b[$ est injective.*

Arcs orientés

Dans la définition 3.1.2, l'application $\theta : I \rightarrow J$ est toujours strictement monotone car c'est un homéomorphisme d'intervalles, elle est donc croissante ou décroissante. Or si le changement de paramètre θ est croissant, il en est de même de θ^{-1} , et si θ_1, θ_2 sont deux changements de paramètre croissants, alors $\theta_2 \circ \theta_1$ est un changement de paramètre croissant. On obtient donc une relation d'équivalence plus fine que celle introduite par la définition 3.1.2.

Définition 3.1.6. Deux chemins $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n; g : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont dits **positivement C^k -équivalents** s'il existe au moins une bijection croissante $\theta : I \rightarrow J$ de classe C^k ainsi que sa réciproque, telle que $f = g \circ \theta$.

Les classes d'équivalence définies par cette relation d'équivalence sont appelées *arcs orientés de classe C^k* .

Soit γ un arc géométrique défini par une paramétrisation f . Les paramétrisations de γ qui se déduisent de f par un changement de paramètre croissant constituent un *arc orienté γ_+* . De même, les paramétrisations de γ qui se déduisent de f par un changement de paramètre décroissant constituent un *arc orienté γ_-* , dit *opposé* à γ_+ . et toute paramétrisation de γ appartient à γ_+ ou à γ_- . Mais les classes γ_+, γ_- ne sont pas nécessairement distinctes, voir les exemples.

Remarquons que $+$ ou $-$ sont relatives à f . La notion d'arc orienté correspond à l'idée intuitive de "courbe munie d'un sens de parcours".

Proposition 3.1.1. *Pour qu'un arc géométrique admette deux orientations, il suffit qu'il possède (au moins) deux points simples.*

Démonstration : Soit γ un arc géométrique, défini par une paramétrisation $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, et admettant deux points simples A, B . Alors pour chaque paramétrisation admissible $g : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ de γ , il existe un couple unique (a_g, b_g) de points de J vérifiant :

$$g(a_g) = A, \quad g(b_g) = B; \quad b_g \neq a_g.$$

De plus, si $g = f \circ \theta$ se déduit de f par le changement de paramètre θ , on a nécessairement :

$$a_f = \theta(a_g), \quad b_f = \theta(b_g).$$

Désignons par γ_+ l'ensemble des paramétrisations $g = f \circ \theta$ de γ par un θ croissant, et γ_- l'ensemble des paramétrisations $g = f \circ \theta$ de γ par un θ décroissant. Alors la relation ci-dessus montre qu'une paramétrisation admissible g de γ appartient à γ_+ si $\text{Sign}(b_g - a_g) = \text{Sign}(b_f - a_f)$, ou à γ_- si $\text{Sign}(b_g - a_g) = -\text{Sign}(b_f - a_f)$. Donc γ_+, γ_- sont sans éléments commun, et il en résulte que γ admet deux orientations.

Corollaire 3.1.1. *Un arc simple admet deux orientations.*

C'est évident car tous les points d'un tel arc sont simples.

Proposition 3.1.2. *Pour qu'un arc géométrique γ défini par une paramétrisation $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, admette une seule orientation, il faut et il suffit qu'il existe une bijection décroissante $\theta : I \rightarrow I$, constituant un changement de paramètre admissible, telle que $f \circ \theta = f$.*

Démonstration : S'il existe une telle bijection θ , il est évident que γ admet une seule orientation.

Inversement, si γ admet une seule orientation, soit $\varphi(t) = -t$. La paramétrisation $g = f \circ \varphi^{-1}$ étant positivement équivalente à f (puisqu'il y a une seule orientation), il existe alors un changement de paramètre croissant $\psi : J \rightarrow I$ tel que $g = f \circ \psi$. Posons $\theta = \psi \circ \varphi$, on voit que θ est un changement de paramètre décroissant vérifiant $f \circ \theta = (f \circ \psi) \circ \varphi = g \circ \varphi = f$.

Exemple 3.1.6.

L'arc γ de \mathbb{R}^2 défini par la paramétrisation $f : t \rightarrow (\sin t, \cos^2 t)$, ($0 \leq t \leq \pi$) n'admet qu'une orientation. En effet le changement de paramètre décroissant $\theta : t \rightarrow \pi - t$ vérifie $f \circ \theta = f$. En fait γ est l'arc de parabole d'équation $y = 1 - x^2$, ($0 \leq x \leq 1$) parcouru deux fois en sens inverses.

Sous-arcs

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $g : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ deux paramétrisations d'un même arc γ de classe C^k , telles que $f = g \circ \theta$ où θ est un changement de paramètre. Pour tout sous-intervalle I_1 de I , les restrictions de f à I_1 et de g à $J_1 = \theta(I_1)$ sont évidemment équivalentes.

Définition 3.1.7. Soit γ un arc géométrique de classe C^k , défini par une paramétrisation $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$. On appelle sous-arc de γ tout arc de même classe que γ défini par la restriction de f à un sous-intervalle de I .

Ce sera souvent qu'on ramène l'étude d'un arc géométrique à celle de sous-arcs simples, qui sont beaucoup plus maniables.

Points réguliers, points stationnaires, arcs réguliers

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ deux paramétrisations d'un même arc γ de classe C^k , $k \geq 1$, telles que $f = g \circ \theta$, où θ est un changement de paramètre. Pour tout $t \in I$, on a $\theta'(t) \neq 0$, et $f'(t) = g'(\theta(t))\theta'(t)$. Donc si on a $f'(t) \neq 0$ on a aussi $g'(u) \neq 0$ avec $u = \theta(t)$.

Définition 3.1.8. Soit γ un arc de classe C^k , $k \geq 1$ défini par une paramétrisation $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$.

(a) Un point simple $M_0 = f(t_0)$ du support de γ est dit ordinaire (ou régulier) si on a $f'(t_0) \neq 0$; il est dit stationnaire si on a $f'(t_0) = 0$.

(b) L'arc γ est dit régulier si on a $f'(t) \neq 0$ pour tout $t \in I$.

Les définitions sont, en effet indépendantes du choix de la paramétrisation f .

Théorème 3.1.1. Tout arc régulier admet deux orientations distinctes.

Démonstration : Soit γ un arc régulier, défini par une paramétrisation $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$. Si γ n'admettait qu'une orientation, il existerait un changement de paramètre décroissant $\theta : I \rightarrow I$ tel que $f = f \circ \theta$. Pour tout $t \in I$, on aurait donc

$$f'(\theta(t))\theta'(t) = f'(t), \quad \theta'(t) < 0.$$

Or une telle application θ admet nécessairement un point fixe. En effet, si α, β sont les extrémités de I , avec $\beta > \alpha$, on a

$$\lim_{t \rightarrow \alpha} \theta(t) = \beta, \quad \lim_{t \rightarrow \beta} \theta(t) = \alpha,$$

d'où pour t assez voisin de α : $\theta(t) - t > 0$; et pour t assez voisin de β : $\theta(t) - t < 0$. la fonction $\theta(t) - t$ s'annule donc au moins une fois sur I . Donc il existe $t_0 \in I$ tel que $\theta(t_0) = t_0$, d'où

$$f'(t_0)\theta'(t_0) = f'(t_0), \quad \theta'(t_0) < 0,$$

ce qui est impossible puisque $f'(t_0) \neq 0$.

Proposition 3.1.3. *Tout arc de classe C^k , $k \geq 1$, admettant une paramétrisation cartésienne, est simple et régulier.*

Démonstration : Comme l'arc γ a une paramétrisation de la forme

$$x_1 = t, x_2 = f_2(t) \cdots, x_n = f_n(t); \quad t \in I.$$

une telle paramétrisation est évidemment injective, donc γ est simple. De plus, pour le dérivée, on a $f'(t) = (1, f_2'(t), \cdots, f_n'(t))$, il est donc non nul, ce qui montre que γ est régulier.

Proposition 3.1.4. *Soit γ un arc de classe C^k , $k \geq 1$, défini par une paramétrisation $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, et soit $t_0 \in I$ tel que $f'(t_0) \neq 0$. Il existe alors un intervalle ouvert J contenant t_0 tel que l'une au moins des coordonnées, soit x_i , soit un paramètre admissible sur le sous-arc γ_1 de γ défini par la restriction de f à $I \cap J$: en conséquence γ_1 est un sous-arc simple et régulier de γ .*

Démonstration : Soit (f_1, \cdots, f_n) les coordonnées de f . Puisque $f'(t_0) \neq 0$, il existe au moins une valeur de i telle que $f_i'(t_0) \neq 0$. Par continuité, il existe un intervalle J , contenant t_0 , tel que l'on ait $f_i'(t) \neq 0$ pour tout $t \in I \cap J$. La restriction θ de f_i à $I \cap J$ est donc strictement monotone, et définit donc un changement de paramètre admissible pour l'arc γ_1 . Donc $g = \theta^{-1}$ est une paramétrisation de γ_1 , la i -ième coordonnée vérifie

$$g_i(u) = f_i(\theta^{-1}(u)) = u, \quad \forall u \in \theta(I \cap J) = f_i(I \cap J).$$

Donc la coordonnée x_i est un paramètre admissible pour γ_1 .

Cette proposition permet de considérer tout arc régulier comme une "réunion" d'arcs simple et régulier définis par des paramétrisations cartésiennes, dont l'étude est élémentaire.

Corollaire 3.1.2. *Soit γ un arc régulier, alors, γ admet localement des paramétrisations cartésiennes.*

3.2. Contact des arcs

Dans cette section, nous allons étudier la disposition relative de deux arcs géométriques au voisinage d'un point commun à leur support. En effectuant au besoin une translation sur les paramètres, nous pouvons supposer que les arcs γ_1, γ_2 sont définies par des paramétrisations f_1, f_2 vérifiant :

$$f_1(0) = f_2(0) = M_0 \in \mathbb{R}^n.$$

On dit qu'un arc simple γ passe par le point $M_0 \in \mathbb{R}^n$, si $M_0 \in \text{Supp}(\gamma)$ et si M_0 n'est pas une extrémité de γ .

Définition 3.2.1. *Soit γ_1, γ_2 deux arcs de classe C^k , $k \geq 1$ simples et réguliers, passant par un point commun M_0 . On dit que γ_1, γ_2 ont en M_0 un **contact d'ordre** $\geq p$ (où $0 \leq p \leq k$), s'il existe des paramétrisations f_1, f_2 de γ_1, γ_2 , définies au voisinage de 0 et vérifiant*

$$(3.2.1) \quad f_1(0) = f_2(0) = M_0, \quad f_1^{(r)}(0) = f_2^{(r)}(0), \quad r = 1, \cdots, p.$$

On a que la condition (3.2.1) est équivalent à

$$f_1(t) - f_1(t) = o(t^p).$$

La notion de contact est locale, on a en effet :

Proposition 3.2.1. *Avec les notations de la définition 3.2.1, Soient γ'_1, γ'_2 des sous arcs de γ_1, γ_2 passant par M_0 . Pour que γ_1 et γ_2 aient en M_0 un contact d'ordre $\geq p$, il faut et il suffit que γ'_1, γ'_2 aient en M_0 un contact d'ordre $\geq p$.*

La relation (3.2.1) dépend des choix de paramétrisation f_1, f_2 , on a deux résultats suivants :

Proposition 3.2.2. *Soit γ_1, γ_2 deux arcs de classe $C^k, k \geq 1$, simples et réguliers, ayant un contact d'ordre $\geq p$ au point M_0 . Pour toute paramétrisation f_1 de γ_1 telle que $f_1(0) = M_0$, il existe une paramétrisation f_2 de γ_2 telle que les conditions (3.2.1) soient remplies.*

Démonstration : Par hypothèse, il existe des paramétrisations $g_1 : J_1 \rightarrow \mathbb{R}^n, g_2 : J_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ de γ_1, γ_2 telles que 0 soit intérieur aux intervalles J_1, J_2 et vérifiant

$$g_1(0) = g_2(0) = M_0; \quad g_1^{(r)}(0) = g_2^{(r)}(0), \quad r = 1, \dots, p.$$

Soit $\theta_1 : J_1 \rightarrow I_1$ un changement de paramètre sur γ_1 tel que $g_1 = f_1 \circ \theta_1$. Puisque γ_1 est simple la relation $f_1(\theta_1(0)) = g_1(0) = M_0 = f_1(0)$ entraîne $\theta_1(0) = 0$.

Soit $J = J_1 \cap J_2$, on pose $\theta_2 = \theta_1|_J : I_2 = \theta_1(J), \rho_1 = \theta_1^{-1}, \rho_2 = \theta_2^{-1}$ ces deux fonctions coïncident sur l'intervalle $\theta_1(J)$, et

$$\rho_1^{(r)}(0) = \rho_2^{(r)}(0), \quad r = 0, 1, \dots, p.$$

Posons $f_2 = g_2 \circ \rho_2$ alors f_2 est une paramétrisation d'un sous-arc de γ_2 . Par récurrence, on voit que les dérivées d'ordre r de $f_i = g_i \circ \rho_i, i = 1, 2$ s'expriment au moyen des dérivées d'ordre $\leq r$ de ρ_i, g_i . On en déduit

$$f_1(0) = f_2(0) = M_0; \quad f_1^{(r)}(0) = f_2^{(r)}(0), \quad r = 1, \dots, p.$$

La paramétrisation $f_2 : I_2 = \theta_1(J) \rightarrow \mathbb{R}^n$ d'un sous arc de γ_2 répond aux conditions voulues.

Remarque : Si f_1, f_2 sont des paramétrisations quelconques de γ_1, γ_2 telles que $f_1(0) = f_2(0) = M_0$, et si γ_1, γ_2 ont en M_0 un contact d'ordre $\geq p$, on a même pas, en général, $f'_1(0) = f'_2(0)$.

Proposition 3.2.3. *Soit γ_1, γ_2 deux arcs de classe $C^k, k \geq 1$, simples et réguliers, définis par les paramétrisations f_1, f_2 . Pour que γ_1, γ_2 aient un contact d'ordre ≥ 1 au point $M_0 = f_1(t_0) = f_2(u_0)$, il faut et il suffit que les vecteurs $f'_1(t_0)$ et $f'_2(u_0)$ soient colinéaires.*

Démonstration : La condition est évidemment nécessaire, car les directions de vecteurs $f'_1(t_0)$ et $f'_2(u_0)$ ne dépendent pas du choix des paramétrisations f_1, f_2 .

Inversement, si on a $f'_2(u_0) = kf'_1(t_0)$, il est facile de déterminer deux constantes λ, μ telles que la paramétrisation g_2 de γ_2 définie par $g_2(t) = f_2(\lambda t + \mu)$ vérifie :

$$g_2(t_0) = M_0, \quad g'_2(t_0) = f'_1(t_0).$$

Il suffit de prendre $\lambda = 1/k, \mu = u_0 - \lambda t_0$. Cela prouve que γ_1, γ_2 ont un contact d'ordre ≥ 1 en M_0 .

- Deux arcs ayant un contact d'ordre ≥ 1 en M_0 sont dits **tangents** en M_0 .
- $\mathcal{C}_{M_0}^k$ est l'ensemble des arcs simples et réguliers, passant par M_0 et de classe $C^k, k \geq 1$.

Proposition 3.2.4. *Pour $p \leq k$, la relation “les arcs γ_1, γ_2 ont en M_0 un contact d'ordre $\geq p$ ” est une relation d'équivalence sur $\mathcal{C}_{M_0}^k$.*

Les classes d'équivalence des arcs définies par la relation de contact d'ordre $\geq p$, sont appelées **éléments de contact** de classe C^k .

Ordre exact du contact

Définition 3.2.2. *Soit γ_1, γ_2 deux arcs de classe $C^k, k \geq 1$ simples et réguliers, passant par un point commun M_0 . On dit que γ_1, γ_2 ont en M_0 un **contact d'ordre exactement égal à p** (où $0 \leq p \leq k - 1$), s'ils ont en M_0 un contact d'ordre $\geq p$, mais non un contact d'ordre $\geq p + 1$.*

Si γ_1, γ_2 ont en M_0 un contact d'ordre $\geq +\infty$, on dit que l'ordre exact de leur contact en ce point est $+\infty$.

Si les arcs γ_1, γ_2 sont définis par des paramétrisations f_1, f_2 de classe C^∞ , vérifiant $f_1(0) = f_2(0) = M_0$, leur ordre de contact est au moins égal au plus grand entier p vérifiant les relations suivantes :

$$f_1'(0) = f_2'(0), \dots, f_1^{(p)}(0) = f_2^{(p)}(0).$$

Mais, l'ordre exact de contact peut être strictement plus grand que p , car il est possible d'avoir des autres paramétrisations de γ_1 et γ_2 telles que l'on a les relations ci-dessus avec un entier plus grand que p .

Le théorème ci-dessous montre un cas positif .

Théorème 3.2.1. *Soit γ, δ deux arcs de classe $C^k, k \geq 1$ simples et réguliers, ayant en M_0 un contact d'ordre égal à $p(p \leq k - 1)$, respectivement définis par des paramétrisations f, g vérifiant $f(0) = g(0) = M_0$. On suppose qu'il existe un repère dans lequel les coordonnées $(f_j), (g_j)$ de f, g vérifient, pour $|t|$ assez petit :*

$$f_1(t) = g_1(t) = t.$$

Alors, on a vérifiant les relations suivantes :

$$f'(0) = g'(0), \dots, f^{(p)}(0) = g^{(p)}(0), f^{(p+1)}(0) \neq g^{(p+1)}(0).$$

Démonstration : Si γ, δ ont un contact d'ordre $\geq p$, selon la proposition 3.2.2, pour la paramétrisation f de γ , il existe une paramétrisation \tilde{g} de δ telle que

$$\tilde{g}(t) - f(t) = O(t^{p+1}),$$

Il existe donc un changement de paramètre $t \mapsto \theta(t)$, défini au voisinage de 0 tel que $\tilde{g}(t) = g(\theta(t))$. Or on a, par hypothèse, $f_1(t) = 1, g_1(u) = u$, d'où $g_1(\theta(t)) = \theta(t)$ et $\theta(t) - t = o(t^{p+1})$. Par composition de développements limités, on

$$g(\theta(t)) = g(t) + O(t^{p+1}),$$

d'où

$$f(t) - g(t) = (f(t) - g(\theta(t))) + (g(\theta(t)) - g(t)) = O(t^{p+1}).$$

Les développements limités des fonctions f et g étant définis par la formule de Taylor-Young, on en déduit :

$$f'(0) = g'(0), \dots, f^{(p)}(0) = g^{(p)}(0).$$

Enfin, si γ et δ n'ont pas un contact d'ordre $\geq p+1$, on a certainement $f^{(p+1)}(0) \neq g^{(p+1)}(0)$.

- Si l'ordre de contact de deux arcs est au moins égal à 2, ces arcs sont dits **osculateurs**; Si l'ordre de contact est au moins égal à 3, ces arcs sont dits **surosculateurs**.

Exemple 3.2.1. Les courbes de \mathbb{R}^2 , γ définie par $x = t, y = \sin t, t \in \mathbb{R}$ et δ définie par $x = t, y = t + \lambda t^3, t \in \mathbb{R}$ sont osculateur à l'origine pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, et surosculateur si $\lambda = -1/6$; enfin, pour $\lambda = -1/6$, leur ordre de contact est égal à 4.

Images d'un arc

Soit γ un arc de classe C^k défini par une paramétrisation $f : I \mapsto \mathbb{R}^n$, et soit U un ouvert de \mathbb{R}^n contenant $f(I)$. Si $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ est une application de classe C^k , il est facile de voir que l'arc Γ défini par la paramétrisation $\Phi \circ f : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ est indépendant du choix de f .

Définition 3.2.3. L'arc Γ de classe C^k défini par la paramétrisation $\Phi \circ f : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ est appelé l'**image de γ par Φ** , nous le noterons $\Phi(\gamma)$.

Si $\Phi : U \rightarrow \Phi(U)$ est un difféomorphisme de classe C^k , c'est-à-dire que Φ est injective, de classe C^k et son inverse Φ^{-1} est aussi une application de classe C^k (dans ce cas-là, on aura $n = m$). On a alors $\gamma = \Phi^{-1}(\Gamma)$.

Une propriété fondamentale de l'ordre de contact est son invariance par les difféomorphismes.

Théorème 3.2.2. Soit γ, δ deux arcs de classe $C^k, k \geq 1$ simples et réguliers, ayant en M_0 un contact d'ordre $\geq p (p \leq k)$, et soit $\Phi : U \rightarrow V$ un difféomorphisme de classe C^k , où U, V deux ouverts de \mathbb{R}^n et $\text{Supp}(\gamma), \text{Supp}(\delta) \subset U$. Alors les arcs $\Phi(\gamma), \Phi(\delta)$ ont au point $N_0 = \Phi(M_0)$ un contact d'ordre $\geq p$.

Démonstration : Soit f, g des paramétrisations de γ, δ vérifiant

$$f(0) = g(0) = M_0, \quad f(t) - g(t) = o(t^p).$$

Par composition de développements limités, on a

$$(\Phi \circ f)(0) = (\Phi \circ g)(0) = N_0, \quad (\Phi \circ f)(t) - (\Phi \circ g)(t) = o(t^p).$$

Corollaire 3.2.1. Avec les notations du théorème 3.2.2, si γ, δ ont en M_0 un contact d'ordre exactement égal à p , alors les arcs $\Phi(\gamma), \Phi(\delta)$ ont en $N_0 = \Phi(M_0)$ un contact d'ordre exactement égal à p .

Ce corollaire est suvant utile pour déterminer l'ordre du contact de deux arcs. En effet, la plupart des transformantions usuelles sont des difféomorphismes, au moins localement.

3.3. Tangente, plan osculateur

Tangente

Définition 3.3.1. Soit γ un arc de classe C^k , $k \geq 1$ défini par une paramétrisation $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$. Soit $t_0 \in I$ et $M_0 = f(t_0)$. On dit que γ admet une tangente en M_0 , si :

- (i) Pour $t \neq t_0$ et $|t - t_0|$ suffisamment petit, $f(t) \neq f(t_0)$;
- (ii) La droite $\overline{f(t_0)f(t)}$ tend vers une limite quand t tend vers t_0 . Cette limite s'appelle la tangente à γ en M_0 .

Cette définition est indépendante du choix de la paramétrisation f .

Théorème 3.3.1. Soit γ un arc de classe C^k , $k \geq 1$, et $M_0 \in \text{Supp}(\gamma)$ un point régulier de γ . Alors γ admet une tangente en M_0 , parallèle au vecteur $\overrightarrow{f'(t_0)}$ où f est une paramétrisation de γ .

Démonstration : Par hypothèse, on a

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\overrightarrow{f(t) - f(t_0)}}{t - t_0} = \overrightarrow{f'(t_0)} \neq 0.$$

Donc $f(t) \neq f(t_0)$ pour $t \neq t_0$ et $|t - t_0|$ assez petit. La droite $\overline{f(t)f(t_0)}$ est bien définie, et parallèle au vecteur $\frac{\overrightarrow{f(t) - f(t_0)}}{t - t_0}$ qui tend vers $\overrightarrow{f'(t_0)}$, d'où le théorème. Si g est une autre paramétrisation de γ , on a $g = f \circ \theta$ et $g'(u) = f'(\theta(u))\theta'(u)$ avec $\theta'(u) \neq 0$. Donc on a que le vecteur $\overrightarrow{f'(t_0)}$ est parallèle au vecteur $\overrightarrow{g'(u_0)}$.

Équation de la tangente en un point régulier

Pour un point régulier M_0 d'un arc γ défini par une paramétrisation $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, ($M_0 = f(t_0)$). La tangente en M_0 , notée $\mathcal{T}_1(M_0)$, est la droite d'équations paramétriques

$$(3.3.1) \quad x_i = f_i(t_0) + (t - t_0)f'_i(t_0), \quad i = 1, \dots, n, \quad t \in \mathbb{R}^n.$$

Le vecteur $\overrightarrow{f'(t)}$ s'appelle le vecteur vitesse pour la valeur t du paramètre.

On a alors immédiatement que deux arcs $\gamma, \mathcal{T}_1(M_0)$ ont un contact d'ordre ≥ 1 .

Définition 3.3.2. Soit γ un arc de classe C^k , $k \geq 2$ défini par la paramétrisation $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ avec $M_0 = f(t_0)$, on dit que M_0 est un **point d'inflexion** de γ , si $f'(t_0)$ est colinéaire à $f''(t_0)$.

Bien sûr la notion de point d'inflexion est indépendante du choix des paramétrisations.

Si M_0 n'est pas un point d'inflexion, deux arcs $\gamma, \mathcal{T}_1(M_0)$ ont un contact d'ordre exactement égal à 1. Si M_0 est un point d'inflexion, pour que deux arcs $\gamma, \mathcal{T}_1(M_0)$ ont un contact d'ordre exactement égal à 2 il faut et il suffit que $f''(t_0) = 0$, $f^{(3)}(t_0) \neq 0$.

Un point d'inflexion est dit **ordinaire** si $\gamma, \mathcal{T}_1(M_0)$ ont un contact d'ordre exactement égal à 2. On dit que γ présente un **méplat** en M_0 si deux arcs $\gamma, \mathcal{T}_1(M_0)$ ont un contact d'ordre ≥ 3 .

Tangente orientée

Si γ est un arc orienté, et si f, g sont deux paramétrisations de γ vérifiant $f(t_0) = g(u_0) = M_0$, les vecteurs $\overrightarrow{f'(t_0)}, \overrightarrow{g'(u_0)}$ ont à la fois même direction et même sens : car si $g = f \circ \theta$ se déduit de f par le changement de paramètre croissante θ , on a $g'(u_0) = f'(t_0)\theta'(u_0)$, avec $\theta'(u_0) > 0$.

L'axe, passant par M_0 , de vecteur directeur $f'(t_0)$, est donc indépendant du choix de la paramétrisation f : on l'appelle **tangente orientée** à γ en M_0 .

Normale

Définition 3.3.3. Soit γ un arc de classe $C^k, k \geq 1$. Toute droite menée par M_0 perpendiculaire à la tangente s'appelle une normale de γ en M_0 .

Soit γ un arc dans \mathbb{R}^2 de classe $C^k, k \geq 1$ défini par une paramétrisation $f : I \rightarrow \mathbb{R}^2, M_0 = f(t_0)$. Dans \mathbb{R}^2 , la normale de γ en M_0 est parallèle au vecteur $(f_2'(t_0), -f_1'(t_0))$.

Dans $\mathbb{R}^n, n > 2$, il y a un plan mené par M_0 perpendiculaire à la tangente. Donc toute droite de ce plan passe par M_0 est la normale de γ en M_0 .

Plan osculateur

Définition 3.3.4. Soit γ un arc de classe $C^k, k \geq 1$ défini par une paramétrisation $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ où $n \geq 3$. Supposons qu'il admet une tangente Γ en $M_0 = f(t_0)$. On dit que γ admet un plan osculateur en M_0 si :

- (i) Pour $t \neq t_0$ et $|t - t_0|$ assez petit, $f(t) \notin \Gamma$;
- (ii) Le plan $P(\Gamma, f(t))$ tend vers une limite quand $t \rightarrow t_0$.

Cette limite s'appelle le plan osculateur à γ en M_0 .

La normale de γ située dans le plan osculateur s'appelle **normale principe**.

Si γ est une droite, on a $f(t) \in \Gamma$ pour tout t , donc il n'y a pas de plan osculateur. Si γ est une courbe plane telle que $f(t) \notin \Gamma$ pour $t \neq t_0$ et $|t - t_0|$ petit, le plan $P(\Gamma, f(t))$ est le plan de la courbe, donc le plan osculateur n'est autre que le plan de la courbe.

Théorème 3.3.2. Soit γ un arc de classe $C^k, k \geq 2$ défini par une paramétrisation $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n, n \geq 3$. Supposons $\overrightarrow{f'(t_0)}$ et $\overrightarrow{f''(t_0)}$ linéairement indépendants. Alors γ admet un plan osculateur en $M_0 = f(t_0)$, parallèle aux vecteurs $\overrightarrow{f'(t_0)}$ et $\overrightarrow{f''(t_0)}$.

Démonstration : On a pour $|h|$ assez petit

$$\overrightarrow{f(t_0) - f(t_0 + h)} = h\overrightarrow{f'(t_0)} + \frac{h^2}{2}\overrightarrow{f''(t_0)} + o(1).$$

Comme $\overrightarrow{f'(t_0)}$ et $\overrightarrow{f''(t_0)} + o(1)$ sont linéairement indépendants, la droite $\overline{f(t_0)f(t_0 + h)}$ est non parallèle à $\overrightarrow{f'(t_0)}$; comme la tangente Γ est parallèle à $\overrightarrow{f'(t_0)}$, on a que $\overline{f(t_0 + h)} \notin \Gamma$ et que le plan $P(\Gamma, f(t_0 + h))$ est parallèle aux vecteurs $\overrightarrow{f'(t_0)}$ et $\overrightarrow{f''(t_0)} + o(1)$. Ainsi, le plan $P(\Gamma, f(t_0 + h))$ a une position limite, parallèle aux vecteurs $\overrightarrow{f'(t_0)}$ et $\overrightarrow{f''(t_0)}$.

Le vecteur $\overrightarrow{f''(t_0)}$ s'appelle le **vecteur accélération** pour la valeur t du paramètre.

Équation du plan osculateur

Sous les conditions du théorème 3.3.2, équation du plan osculateur à γ en $M_0 = f(t_0)$ est donné par la paramétrisation suivante :

$$(3.3.2) \quad x = tf'(t_0) + sf''(t_0) + f(t_0), \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Dans \mathbb{R}^3 , si $\overrightarrow{f'(t_0)}$ et $\overrightarrow{f''(t_0)}$ sont linéairement indépendants, le **plan osculateur** à γ en M_0 admet l'équation cartésienne

$$(3.3.3) \quad \det \begin{bmatrix} x_1 - f_1(t_0) & x_2 - f_2(t_0) & x_3 - f_3(t_0) \\ f'_1(t_0) & f'_2(t_0) & f'_3(t_0) \\ f''_1(t_0) & f''_2(t_0) & f''_3(t_0) \end{bmatrix} = 0.$$

En effet, si $M = (x_1, x_2, x_3)$ est un point sur le plan, on a que les trois vecteurs $\overrightarrow{M_0M}$, $\overrightarrow{f'(t_0)}$, $\overrightarrow{f''(t_0)}$ sont liés.

Arcs réguliers dont tous les points sont d'inflexion

Théorème 3.3.3. *Soit γ un arc simple et régulier de classe C^k , $k \geq 2$. Si tous les points de γ sont des points d'inflexion, alors le support de γ est un intervalle de droite.*

Démonstration : Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une paramétrisation de γ , par hypothèse, $f'(t) \neq 0$, et il existe une fonction (continue) λ vérifiant

$$f''(t) = \lambda(t)f'(t), \quad t \in I.$$

En fait, la fonction scalaire λ est de classe C^{k-2} . En utilisant des coordonnées, on a alors

$$f''_j(t) = \lambda(t)f'_j(t), \quad t \in I, \quad j = 1, \dots, n.$$

Soit, pour $t_0 \in I$,

$$f_j(t) = f_j(t_0) + \phi(t)f'_j(t_0), \quad t \in I, \quad j = 1, \dots, n$$

où

$$\phi(t) = \int_{t_0}^t \exp \left[\int_{t_0}^u \lambda(s) ds \right] du,$$

soit, sous forme vectorielle :

$$f(t) = f(t_0) + \phi(t)f'(t_0), \quad t \in I.$$

On pose $s = \phi(t)$, c'est un changement de variable, car

$$\phi'(t) = \exp \left[\int_{t_0}^t \lambda(s) ds \right] \neq 0.$$

On en déduit que le support Γ de γ est contenu dans la droite D , passant par le point M_0 , et parallèle à $f'(t_0)$, i. e.

$$x = f(t_0) + sf'(t_0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

De plus, puisque Γ est connexe, c'est un intervalle de D .

3.4. Étude des arcs plans

Arcs plans simples

On étudie dans cette section, l'arcs plan γ de classe $C^k, k \geq 2$, défini par une paramétrisation $f : I \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Rappelons qu'un point $M_0 = f(t_0)$ de γ est dit **ordinaire** si $f'(t_0) \neq 0$, **stationnaire** si $f'(t_0) = 0$.

Etude au voisinage d'un point ordinaire

On suppose que $f(0) = M_0 = 0 \in \mathbb{R}^2$ et il existe un entier $q \geq 2$ tel que les vecteurs $\overrightarrow{f'(0)}, \overrightarrow{f^{(q)}(0)}$ soient indépendants, et nous désignerons par p le plus petit des entiers q vérifiant cette condition.

Le développement limité d'ordre p de f au voisinage de 0 est alors de la forme :

$$f(t) = f(0) + [t + t^2P(t)]f'(0) + \frac{t^p}{p!}f^{(p)}(0) + o(t^p),$$

ou $P(t)$ est un polynôme à coefficients réels (qui est nul si $p = 2$).

On choisit un nouvel repère d'origine M_0 , défini par les vecteurs $\vec{e}_1 = \overrightarrow{f'(0)}, \vec{e}_2 = 1/((p!)f^{(q)}(0))$ et $f(t) = X(t)\vec{e}_1 + Y(t)\vec{e}_2$, on a alors

$$X(t) = t + o(t), \quad Y(t) = t^p + o(t^p).$$

Or la première coordonnée X est un paramètre admissible sur γ au voisinage de M_0 , Les relations c-dessus entraînent donc

$$t = X + o(X), \quad Y = X^p + o(X).$$

Il en résulte que l'arc γ , et l'arc d'équation $Y = X^p$, ont un contact d'ordre $\geq p$ en M_0 .

a) Cas $p = 2$. Dans ce cas-là, M_0 n'est pas un point d'inflexion, ce cas est réalisé si et seulement si les fonctions $X(t), Y(t)$ vérifient

$$X'(0)Y''(0) - Y'(0)X''(0) \neq 0.$$

On dit que γ présente en M_0 la disposition **ordinaire**. La parabole $Y = X^2$ est approximation de γ .

b) Cas $p \geq 3$. Dans ce cas-là, M_0 est un point d'inflexion, et les fonctions $X(t), Y(t)$ vérifient

$$X'(0)Y''(0) - Y'(0)X''(0) = 0.$$

Si p est **impair**, la fonction $X \mapsto Y(X)$ est du signe de X au voisinage de 0, on dit que le support de γ **traverse** la tangente $\overline{M_0X}$.

Si p est **pair**, la fonction $X \mapsto Y(X)$ est positive au voisinage de 0, la disposition est analogue à la disposition ordinaire, mais la forme de support de γ est beaucoup plus "aplaite" sur la tangente $\overline{M_0X}$.

Etude au voisinage d'un point stationnaire

On suppose que $f(0) = M_0 = 0, f'(0) = 0$. et il existe $2 \leq p < q$ tels que

$$f(t) = f(0) + \frac{t^p}{p!}[1 + tP(t)]f^{(p)}(0) + \frac{t^q}{q!}f^{(q)}(0) + o(t^q),$$

ou $P(t)$ est un polynôme à coefficients réels (qui est nul si $q = p + 1$).

On choisit un nouvel repère d'origine M_0 , défini par les vecteurs $\vec{e}_1 = 1/(p!) \overrightarrow{f^{(p)}(0)}$ et $\vec{e}_2 = 1/((q!) \overrightarrow{f^{(q)}(0)})$ et $f(t) = X(t)\vec{e}_1 + Y(t)\vec{e}_2$, on a alors

$$X(t) = t^p + o(t^p), \quad Y(t) = t^q + o(t^q).$$

La position relative du support de γ et de l'axe $\overline{M_0X}$, pour t voisin de 0, est fournie par la relation $Y/X \sim t^{q-p}$.

Courbes planes définies implicitement

Définition 3.4.1. Soit $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^k, k \geq 1$ sur un ouvert U de \mathbb{R}^2 . Soit Γ_f l'ensemble des points $M = (x, y) \in U$ vérifiant la relation $f(x, y) = 0$. Le couple (f, Γ_f) est appelé **la courbe d'équation** $F(x, y) = 0$, ou la **courbe définie implicitement** par $f(x, y) = 0$.

Dans tout ce qui suit, nous noterons df_M la différentielle de la fonction f au point M , i. e.

$$df_M = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(M) dx_j.$$

Définition 3.4.2. Un point M de la courbe d'équation $f = 0$ est dit **ordinaire** (ou régulier) si la différentielle df_M est non nulle, il est dit **singulier** si $df_M = 0$.

Voici une version géométrique du théorème des fonctions implicites.

Théorème 3.4.1. Soit $M_0 = (x_0, y_0)$ un point ordinaire de la courbe plane Γ d'équation $f(x, y) = 0$. Il existe alors un voisinage V de M_0 tel que $\Gamma \cap V$ soit le support d'un arc γ (de classe C^k comme f) admettant une paramétrisation cartésienne, et la tangente à cet arc en M_0 est la droite définie par l'équation

$$(3.4.1) \quad f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0.$$

Démonstration : On suppose que $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$, d'après le théorème des fonctions implicites, il existe alors des intervalles I, J et une application $\varphi : I \rightarrow J$ de classe C^k vérifiant $\varphi(x_0) = y_0$, telle que

$$f(x, y) = 0, \forall (x, y) \in I \times J \Leftrightarrow y = \varphi(x), \forall x \in I.$$

γ est l'arc d'équation cartésienne $y = \varphi(x), x \in I$.

La tangente en M_0 à γ est la droite d'équation

$$y - y_0 = \varphi'(x_0)(x - x_0).$$

D'après le théorème des fonctions implicites, on a

$$\varphi'(x_0) = -\frac{f'_x(x_0, y_0)}{f'_y(x_0, y_0)}.$$

La tangente est donc définie par l'équation (3.4.1).

Points d'inflexions

En utilisant les notations ci-dessus avec $k \geq 2$, pour que M_0 soit un point d'inflexion de γ , il faut et il suffit qu'on ait $\varphi''(x_0) = 0$. Par dérivation des fonction composées :

$$\varphi'' = \frac{(f'_x)^2 f''_{xy} - f'_x f'_y (f''_{x^2} + f''_{y^2}) + (f'_y)^2 f''_{xy}}{(f'_y)^3}.$$

On en déduit

Théorème 3.4.2. *Soit f une fonction de classe C^k , $k \geq 2$ sur un ouvert de \mathbb{R}^2 , et Γ la courbe définie implicitement par l'équation $f(x, y) = 0$. Pour qu'un point ordinaire de Γ soit un **point d'inflexion**, il faut et il suffit que ses coordonnées (x, y) vérifient*

$$\left[(f'_x)^2 f''_{xy} - f'_x f'_y (f''_{x^2} + f''_{y^2}) + (f'_y)^2 f''_{xy} \right] (x, y) = 0.$$

Points singuliers

Si M_0 est un point **singulier**, i. e. $df_{M_0} = 0$, on ne peut faire de théorie générale. Mais on étudie quelque "bon cas". On suppose que la différentielle du second ordre $d^2 f_{M_0}$ est "non dégénérée" i. e. dans la base canonique de \mathbb{R}^2 , la matrice

$$A_{M_0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

est "non dégénérée".

Cas a). A_{M_0} est définie

Dans ce cas, f admet en M_0 un extremum strict, il existe alors un voisinage V de M_0 tel qu'on ait $f(M) \neq f(M_0)$, $\forall M \in V \setminus \{M_0\}$. Le point M_0 est donc un point isolé de l'ensemble Γ_f . On dit alors que M_0 est un point singulier isolé de Γ_f .

Cas b). A_{M_0} n'est pas définie

On a dans ce cas

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) > 0.$$

On suppose que f est de classe C^k , $k \geq 3$. Nous avons le résultat suivant :

Théorème 3.4.3. *Il existe une base $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ de \mathbb{R}^2 , un voisinage W de M_0 et un difféomorphisme Φ de classe C^{k-2} de W sur un voisinage V de M_0 tels que*

$$(3.4.2) \quad f \circ \Phi(M_0 + X\vec{i} + Y\vec{j}) = X^2 - Y^2$$

pour $M_0 + X\vec{i} + Y\vec{j} \in W$, $X, Y \in \mathbb{R}$.

Ce résultat nous permettra de préciser la forme de Γ_f au voisinage de M_0 , c'est-à-dire une déformation de deux droites $X - Y = 0$, $X + Y = 0$. La démonstration est une application directe de théorème d'inversion locale et de formule de Taylor. Pour la

dernière, nous énonçons un lemme de préparation qui présente un intérêt propre dans l'analyse.

Lemme 3.4.1. (Lemme de préparation)

Soit G une fonction de classe C^k , $k \geq 2$ définie sur $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |x| < a, |y| < a\}$, supposons que $G(0, 0) = 0$ et $g'_x(0, 0) = g'_y(0, 0) = 0$. Alors il existe trois fonctions P, Q, R de classe $C^{k-2}(\Omega)$ vérifiant

$$(3.4.3) \quad G(x, y) = x^2P(x, y) + 2xyQ(x, y) + y^2R(x, y), \quad \forall (x, y) \in \Omega,$$

$$\text{et } P(0, 0) = \frac{1}{2}G''_{x^2}(0, 0), \quad Q(0, 0) = \frac{1}{2}G''_{xy}(0, 0), \quad R(0, 0) = \frac{1}{2}G''_{y^2}(0, 0).$$

Démonstration : Le point $(x, y) \in \Omega$ étant fixé, on définit une fonction $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, par $\varphi(t) = G(tx, ty)$, $\forall t \in [0, 1]$. Cette fonction φ est de classe C^k , d'après la règle de dérivation des fonctions composées, on a $\varphi'(t) = xG'_x(tx, ty) + yG'_y(tx, ty)$, d'où

$$\varphi''(t) = x^2G''_{x^2}(tx, ty) + 2xyG''_{xy}(tx, ty) + y^2G''_{y^2}(tx, ty).$$

Les conditions sur G impliquent $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$. On utilise la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0)(1 - 0) + \int_0^1 (1 - t)\varphi''(t)dt,$$

soit

$$G(x, y) = x^2P(x, y) + 2xyQ(x, y) + y^2R(x, y)$$

avec $P(x, y) = \int_0^1 (1 - t)G''_{x^2}(tx, ty)dt$, $Q(x, y) = \int_0^1 (1 - t)G''_{xy}(tx, ty)dt$ et $R(x, y) = \int_0^1 (1 - t)G''_{y^2}(tx, ty)dt$, il est évident que P, Q, R sont de classe C^{k-2} et

$$P(0, 0) = \int_0^1 (1 - t)G''_{x^2}(0, 0)dt = \frac{1}{2}G''_{x^2}(0, 0),$$

et le même pour $Q(0, 0)$ et $R(0, 0)$.

CHAPITRE 4

Métriques des arcs

4.1. Longueur d'une courbe

Nous étudions maintenant les propriétés métriques des arcs. L'espace \mathbb{R}^n sera toujours muni de la structure euclidienne canonique.

Arc rectifiable, longueur

Soit γ un arc compact de \mathbb{R}^n défini par une paramétrisation continue $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Pour $\sigma = (t_0, t_1, \dots, t_p)$ une subdivision de $[a, b]$, ($t_0 = a, t_p = b$), on associe une ligne polygonale (M_0, M_1, \dots, M_p) dite inscrite dans γ , de sommets $M_i = f(t_i)$.

La longueur de cette ligne est le nombre

$$L_{\sigma, f} = \sum_{i=0}^{p-1} |\overrightarrow{M_i M_{i+1}}| = \sum_{i=0}^{p-1} |f(t_{i+1}) - f(t_i)|.$$

Il est évident que la longueur dépend du choix de la norme qu'on utilise. Désignons par \mathcal{S} l'ensemble des subdivisions de $[a, b]$, et notons

$$L_f = \sup_{\sigma \in \mathcal{S}} (L_{\sigma, f}),$$

la borne supérieure des nombres $L_{\sigma, f}$ dans $\bar{\mathbb{R}}$, c'est un réel positif si les nombres $L_{\sigma, f}$ sont majorés, et $+\infty$ dans le cas contraire.

Si $g : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une autre paramétrisation de γ , il existe une bijection continue $\theta : [a, b] \rightarrow [\alpha, \beta]$ telle que $g = f \circ \theta$, et cette bijection est strictement monotone. Si θ est croissante, l'image d'une subdivision de $[a, b]$ est une subdivision de $[\alpha, \beta]$, et réciproquement. Si θ est décroissante, elle établit encore une correspondance bijective entre les subdivisions de $[a, b]$ et celles de $[\alpha, \beta]$, mais en renversant l'ordre de ces subdivisions.

Dans les deux cas, les paramétrisations f et g définissent le même ensemble de lignes polygonales inscrites dans γ , et on a donc $L_g = L_f$. En d'autres termes, $L = L_f$ est un élément de $\bar{\mathbb{R}}$ indépendant du choix de f . Nous dirons que L est la borne supérieure des longueurs des lignes polygonales inscrites dans γ .

Définition 4.1.1. *Un arc γ de \mathbb{R}^n est dit rectifiable si la borne supérieure des longueurs des lignes polygonales inscrites dans γ est finie. S'il en est ainsi, cette borne supérieure L est un réel positif, appelé la longueur de γ , et noté $L(\gamma)$.*

On remarquera que l'on a $L(\gamma) = 0$ que si γ se réduit à un point, i.e. si ses paramétrisations sont constantes.

Théorème 4.1.1. *Soit γ un arc de classe C^k , $k \geq 1$. Alors γ est rectifiable, et si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ désigne une paramétrisation de γ , la longueur de γ est*

$$L(\gamma) = \int_a^b |f'(t)| dt.$$

Démonstration : (a) Montrons d'abord que γ est rectifiable.

Comme la fonction f' est intégrable sur $[a, b]$; et pour tous $u, v \in [a, b]$, on a

$$f(v) - f(u) = \int_u^v f'(t) dt,$$

d'où

$$|f(v) - f(u)| \leq \int_u^v |f'(t)| dt.$$

Si $\sigma = (t_0, t_1, \dots, t_p)$ est une subdivision de $[a, b]$, on a donc

$$L_{\sigma, f} = \sum_{j=1}^{p-1} |f(t_{j+1}) - f(t_j)| \leq \sum_{j=1}^{p-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} |f'(t)| dt = \int_a^b |f'(t)| dt.$$

L'ensemble des nombres $L_{\sigma, f}$ est donc majoré par le nombre

$$L = \int_a^b |f'(t)| dt,$$

ce qui prouve que γ est rectifiable, et que sa longueur vérifie $L(\gamma) \leq L$.

(b) Pour chaque subdivision $\sigma = (t_0, t_1, \dots, t_p)$ de $[a, b]$, posons

$$\Delta_\sigma = \int_a^b |f'(t)| dt - L_{\sigma, f} = \sum_{j=1}^{p-1} \left(\int_{t_j}^{t_{j+1}} |f'(t)| dt - |f(t_{j+1}) - f(t_j)| \right).$$

D'après (a) on a $\Delta_\sigma \geq 0$, donc pour établir l'égalité $L = L_f$, il suffit de prouver que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une subdivision σ vérifiant $\Delta_\sigma \leq \varepsilon$.

Maintenant pour $\varepsilon > 0$ fixé, la continuité uniforme de f' sur le compact $[a, b]$ entraîne l'existence d'un nombre $h > 0$ tel que, pour tous $u, v \in [a, b]$ vérifiant $|u - v| \leq h$, on ait

$$|f'(u) - f'(v)| \leq \frac{\varepsilon}{2n(b-a)},$$

d'où

$$||f'(u)| - |f'(v)|| \leq \frac{\varepsilon}{2n(b-a)}.$$

Soit alors $\sigma = (t_0, t_1, \dots, t_p)$ une subdivision de $[a, b]$ de pas $\leq h$, i.e. vérifiant $|t_{j+1} - t_j| \leq h$ pour tout $j = 0, 1, \dots, p-1$.

On a d'abord

$$\left| \int_{t_j}^{t_{j+1}} |f'(t)| dt - (t_{j+1} - t_j) |f'(t_j)| \right| \leq \frac{\varepsilon}{2n(b-a)} (t_{j+1} - t_j).$$

Posons $\varphi(t) = f(t) - t f'(t_j)$ la fonction vectoriel définie sur $[t_j, t_{j+1}]$, on a alors

$$|\varphi'(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2n(b-a)}, \quad \forall t \in [t_j, t_{j+1}],$$

Par application de l'inégalité des accroissements finis à chaque composant de φ , on a donc

$$\begin{aligned} |\varphi(t_{j+1}) - \varphi(t_j)|^2 &= \sum_{i=1}^n |\varphi_i(t_{j+1}) - \varphi_i(t_j)|^2 \\ &\leq n \left(\frac{\varepsilon}{2n(b-a)} (t_{j+1} - t_j) \right)^2 \leq \left(\frac{\varepsilon}{2(b-a)} (t_{j+1} - t_j) \right)^2, \end{aligned}$$

soit

$$|f(t_{j+1}) - f(t_j) - (t_{j+1} - t_j)f'(t_j)| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} (t_{j+1} - t_j),$$

d'où l'on déduit, pour $j = 0, 1, \dots, p-1$,

$$\left| |f(t_{j+1}) - f(t_j)| - (t_{j+1} - t_j)|f'(t_j)| \right| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} (t_{j+1} - t_j).$$

On obtient finalement

$$\left| \int_{t_j}^{t_{j+1}} |f'(t)| dt - |f(t_{j+1}) - f(t_j)| \right| \leq \frac{2\varepsilon}{2(b-a)} (t_{j+1} - t_j),$$

d'où, par addition : $\Delta_\sigma \leq \varepsilon$.

Équivalence de la longueur d'un petit arc avec la longueur de la corde

Théorème 4.1.2. *Soit γ un arc régulier de classe C^k , $k \geq 1$ défini par une paramétrisation $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, et soit $t_0 \in I$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel $h > 0$ tel que les relations $u < v$, $|u - t_0| \leq h$, $|v - t_0| \leq h$ impliquent $f(u) \neq f(v)$, et*

$$\left| \frac{\int_u^v |f'(t)| dt}{|f(v) - f(u)|} - 1 \right| \leq \varepsilon.$$

Démonstration : Comme γ est régulier, on a $f'(t_0) \neq 0$. Soit alors α un réel vérifiant $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}|f'(t_0)|$. La continuité de f' entraîne l'existence d'un réel $h > 0$ tel que, pour $|t - t_0| \leq h$, on ait

$$|f'(t) - f'(t_0)| \leq \alpha.$$

En appliquant l'inégalité des accroissements finis à la fonction $\varphi(t) = f(t) - tf'(t_0)$, on voit les relations $|u - t_0| \leq h$, $|v - t_0| \leq h$ impliquent

$$\left| |f(v) - f(u)| - (v - u)|f'(t_0)| \right| \leq \alpha|v - u|,$$

d'où

$$|f(v) - f(u)| \geq |v - u|(|f'(t_0)| - \alpha) \geq \frac{1}{2}|v - u||f'(t_0)|.$$

D'autre part, on a

$$\left| |f'(t)| - |f'(t_0)| \right| \leq \alpha,$$

d'où

$$\left| \int_u^v |f'(t)| dt - (v - u)|f'(t_0)| \right| \leq \alpha|v - u|.$$

On en déduit

$$\left| \int_u^v |f'(t)| dt - |f(v) - f(u)| \right| \leq 2\alpha |v - u|,$$

et

$$\left| \int_u^v |f'(t)| dt - |f(v) - f(u)| \right| \leq 4\alpha |f'(t_0)| |f(v) - f(u)|.$$

En choisissant

$$\alpha = \inf \left(\frac{1}{2} |f'(t_0)|, \frac{\varepsilon}{4} |f'(t_0)| \right)$$

on obtient le résultat cherché.

Soit γ un arc de classe C^k , $k \geq 1$ défini par une paramétrisation $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Désignons par (f_1, \dots, f_n) les coordonnées de f , on a alors, pour la métrique euclidienne,

$$(4.1.1) \quad L(\gamma) = \int_a^b [f_1'^2(t) + \dots + f_n'^2(t)]^{1/2} dt.$$

Abscisse curviligne

Soit $t_0 \in I$, la fonction

$$(4.1.2) \quad s(t) = \int_{t_0}^t |f'(u)| du$$

est appelée **abscisse curviligne** d'origine t_0 de γ .

Exemple 4.1.1. Soit γ l'ellipse définie dans \mathbb{R}^2 par la paramétrisation $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$. sa longueur est

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt.$$

Pour $|a| \neq |b|$, le calcul effectif de $L(\gamma)$ exigerait l'emploi des fonctions elliptiques.

Exemple 4.1.2. Soit γ l'arc de cissoïde défini dans \mathbb{R}^2 par

$$x = \frac{at^2}{1+t^2}, \quad y = \frac{at^3}{1+t^2}, \quad (0 \leq t \leq T).$$

Sa longueur est

$$L(\gamma) = \int_0^T (x'(t)^2 + y'(t)^2)^{1/2} dt = a \int_0^T \frac{t}{1+t^2} \sqrt{4+t^2} dt.$$

En posant $u = t^2$, on obtient

$$L(\gamma) = \frac{a}{2} \int_0^{T^2} \frac{\sqrt{u+4}}{u+1} du.$$

Enfin, posons $v = \sqrt{u+4}$, on obtient

$$L(\gamma) = a \left\{ -2 + \sqrt{T^2 + 4} + \frac{\sqrt{3}}{2} [\log(7 + 4\sqrt{3}) + \log(T^2 + 1) - \log(t^2 + 2\sqrt{3}\sqrt{T^2 + 4} + 7)] \right\}.$$

Calcul en coordonnées polaires

Soit γ un arc de \mathbb{R}^2 défini dans un repère orthonormal par les équations paramétriques

$$x = r(t) \cos \theta(t), \quad y(t) = r(t) \sin \theta(t), \quad t \in I = [a, b],$$

on dirons que, en coordonnées polaires, γ est l'arc défini par les équations paramétriques

$$r = r(t), \quad \theta = \theta(t), \quad t \in I.$$

On calcule les différentielles

$$x'(t) = r'(t) \cos \theta(t) - r(t) \theta'(t) \sin \theta(t), \quad y'(t) = r'(t) \sin \theta(t) + r(t) \theta'(t) \cos \theta(t).$$

On a alors

$$|(x'(t), y'(t))|^2 = |x'(t)|^2 + |y'(t)|^2 = |r'(t)|^2 + |r(t)|^2 |\theta'(t)|^2,$$

et la longueur de γ est donnée par

$$(4.1.1a) \quad L(\gamma) = \int_a^b \left[|r'(t)|^2 + |r(t)|^2 |\theta'(t)|^2 \right]^{1/2} dt.$$

Calcul en coordonnées cylindriques

Soit γ un arc de \mathbb{R}^3 défini par la paramétrisation $f : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, en coordonnées cylindriques, par les équations paramétriques

$$r = r(t), \quad \theta = \theta(t), \quad z = z(t), \quad t \in I.$$

i. e. dans le repère canonique

$$x = r(t) \cos \theta(t), \quad y(t) = r(t) \sin \theta(t), \quad z = z(t), \quad t \in I = [a, b].$$

Par un calcul analogue, la longueur de γ est donnée par

$$(4.1.1b) \quad L(\gamma) = \int_a^b \left[|r'(t)|^2 + |r(t)|^2 |\theta'(t)|^2 + |z'(t)|^2 \right]^{1/2} dt.$$

Calcul en coordonnées sphériques

On rappelle le passage entre coordonnées euclidiennes et coordonnées sphériques :

$$f : \quad \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (r, \theta, \varphi) \mapsto (x = r \sin \theta \cos \varphi, y = r \sin \theta \sin \varphi, z = r \cos \theta).$$

Soit γ un arc de \mathbb{R}^3 défini par la paramétrisation $f : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, en coordonnées sphériques, par les équations paramétriques

$$r = r(t), \quad \theta = \theta(t), \quad \varphi = \varphi(t), \quad t \in I.$$

La longueur de γ est donnée par

$$(4.1.1c) \quad L(\gamma) = \int_a^b \left[|r'(t)|^2 + |r(t)|^2 |\theta'(t)|^2 + |r(t)|^2 |\varphi'(t)|^2 \sin^2 \theta(t) \right]^{1/2} dt.$$

4.2. Paramètres normaux

Définition 4.2.1. Soit γ un arc de classe C^1 . On appelle paramétrisation normale de γ toute paramétrisation $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que, pour tout $t \in I$, on ait $|f'(t)| = 1$.

Il est clair que l'existence d'une telle paramétrisation implique que γ est régulier. Inversement, nous avons

Théorème 4.2.1. Soit γ un arc régulier de classe C^k , $k \geq 1$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une paramétrisation, et soit $t_0 \in I$, et pour tout $t \in I$, posons

$$s(t) = \int_{t_0}^t |f'(u)| du.$$

(a) alors la fonction $s(\cdot)$ définit un changement de paramètre admissible pour γ , soit en explicitant : $s(\cdot)$ détermine une bijection de classe C^k de I sur un intervalle J , dont la réciproque $\varphi : J \rightarrow I$ est aussi de classe C^k .

(b) Pour chaque constante $s_0 \in \mathbb{R}$, les paramétrisations

$$(i) \quad s \rightarrow f \circ \varphi(s - s_0) \quad \text{et} \quad (ii) \quad s \rightarrow f \circ \varphi(s_0 - s)$$

sont des paramétrisations normales de γ .

(c) Toute paramétrisation normale de γ est de la forme (i) ou (ii) selon qu'elle définit, ou non, la même orientation de γ que f .

Démonstration : L'assertion (a) résulte du fait que, par hypothèse, la fonction f' ne s'annule pas sur I , et qu'en conséquence, la fonction $t \rightarrow |f'(t)|$ est de classe C^{k-1} , car $x \rightarrow |x|$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Pour établir (b), posons $g = f \circ \varphi(s - s_0)$. On a

$$g'(s) = [f' \circ \varphi(s - s_0)] \varphi'(s - s_0) = \frac{f' \circ \varphi(s - s_0)}{|f' \circ \varphi(s - s_0)|},$$

d'où $|g'(s)| = 1$. Donc g est une paramétrisation normale de γ . De même pour (ii).

Inversement, soit h une paramétrisation normale quelconque de γ . Il existe alors un changement de paramètre admissible θ tel que $h = g \circ \theta$, donc

$$h'(u) = g'[(\theta(u))] \theta'(u),$$

puisque l'on a $|h'(u)| = |g'[(\theta(u))]| = 1$, on a alors $|\theta'(u)| = 1$ pour toute valeur du paramètre u . Mais la fonction $\theta'(u)$ est continue, on a nécessairement $\theta'(u) = 1$ pour tout u , ou $\theta'(u) = -1$ pour tout u .

Si h définit la même orientation de γ que f , on a $\theta'(u) = 1$, d'où $\theta(u) = u - s_0$, et $h(s) = g(s - s_0)$. Donc h est de la forme (i).

Si h définit l'orientation opposée, on a $\theta'(u) = -1$, d'où $\theta(u) = s_0 - u$, et $h(s) = g(s_0 - s)$. Donc h est de la forme (ii).

Corollaire 4.2.1. *Tout arc régulier et orienté de classe C^k , $k \geq 1$ admet une infinité de paramétrisations normales. Si g désigne l'une d'elles, les autres sont toutes les applications de la forme*

$$s \rightarrow g(s - s_0).$$

Quelques notions géométriques

Nous donnons quelques notions géométriques pour les courbes.

Vecteur unitaire tangent

Soit γ un arc régulier orienté de classe C^k , $k \geq 1$ défini par une paramétrisation normale $g : I \rightarrow \mathbb{R}^n$. La fonction vectorielle g' sera appelée la **fonction vecteur unitaire tangent** à γ . Elle est définie à une translation près du paramètre.

Si $M = g(s)$ est un point simple de γ , le vecteur $\overrightarrow{g'(s)}$ ne dépend que du point M et non de la paramétrisation normale choisie g de γ . C'est le **vecteur unitaire tangent** à γ en M .

Courbure

La fonction numérique ρ définie sur I par $\rho(s) = |g''(s)|$ est appelée la **fonction courbure** de γ . Si $M = g(s)$ est un point simple de γ , le nombre $\rho(s)$ ne dépend pas de la paramétrisation normale choisie. On dit que c'est la **courbure** de γ au point M .

On notera que la courbure au point M est nulle si, et seulement si M est un **point d'inflexion** de γ . Selon le théorème 3.3.3, on a donc immédiatement le résultat suivant :

Théorème 4.2.2. *Si γ est un arc régulier de \mathbb{R}^n dont la fonction courbure est nulle alors le support de γ est un intervalle de droite.*

Normale principale

Si l'arc γ n'admet pas de point d'inflexion, $\rho(s) \neq 0$ pour tout $s \in I$, on pose

$$\overrightarrow{v}(s) = \frac{g''(s)}{\rho(s)}, \quad s \in I,$$

on a alors $|\overrightarrow{v}(s)| = 1$, et la relation $|g'(s)| = 1$ implique, par dérivation, $g'(s) \cdot g''(s) = 0$, soit $g'(s) \cdot \overrightarrow{v}(s) = 0$, pour tout $s \in I$. La fonction vectorielle $\overrightarrow{v}(s)$ est appelée **fonction normale principale** à γ . Cette fonction ne dépend pas de l'orientation de γ .

Si $M = g(s)$ est un point simple de γ , le vecteur $\overrightarrow{v}(s)$ ne dépend ni de l'orientation de γ , ni de la paramétrisation normale choisie g . La droite passant par M et de vecteur directeur $\overrightarrow{v}(s)$ est la **normale principale** à γ en M . C'est la seule normale à γ contenue dans le plan osculateur à γ en M .

Rayon et centre de courbure

On suppose toujours que l'arc γ n'admet pas de point d'inflexion, c'est-à-dire que $\rho(s) \neq 0$ pour tout $s \in I$, le nombre

$$R(s) = 1/\rho(s)$$

est appelé **rayon de courbure** de γ en $M = g(s)$. et le point $C \in \mathbb{R}^n$ défini par

$$\overrightarrow{MC} = R(s)\vec{v}(s)$$

est appelé **centre de courbure** de γ en M . Notons que le point C est indépendant de l'orientation choisie sur γ .

Cas d'une paramétrisation quelconque

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une paramétrisation de classe C^2 définissant un arc orienté γ , régulier et sans point d'inflexion. On se ramène au cas d'une paramétrisation normale g en faisant un changement de paramètre $t \mapsto s(t)$ tel que

$$\frac{ds}{dt} = |f'(t)|.$$

On a alors, avec $f(t) = g(s(t))$,

$$f'(t) = g'(s)\frac{ds}{dt}, \quad f''(t) = g'(s)\frac{d^2s}{dt^2} + g''(s)\left(\frac{ds}{dt}\right)^2,$$

d'où, avec les notations ci-dessus :

$$(4.2.1) \quad f''(t) = g'(s)\frac{d^2s}{dt^2} + \rho(s)\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \vec{v}(s).$$

Cette relation montre que le vecteur "accélération" $f''(t)$ est contenu dans le plan osculateur au point $M = f(t) = g(s)$.

Exemple

Dans le plan \mathbb{R}^2 , soit γ la circonférence orientée de rayon $a > 0$, définie par la paramétrisation

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Un paramètre normal est $s = t/a$, et $\rho(s) = 1/a$.

Le rayon de courbure de γ est égal à son rayon a en tous point de γ , le vecteur \vec{v} est le vecteur unitaire normal à γ girigé vers son centre, et le centre de courbure de γ coïncide avec son centre *ce qui justifie la terminologie).

Détermination d'ordre exact du contact

Théorème 4.2.3. Soient γ_1, γ_2 deux arcs simples réguliers de classe $C^k, k \geq 2$ définis par des paramétrisations normales g_1, g_2 vérifiant

$$g_1(0) = g_2(0) = M_0, \quad g_1'(0) = g_2'(0),$$

(donc deux arcs tangents en M_0). Pour que γ_1, γ_2 aient en M_0 un contact d'ordre $\geq p$, ($2 \leq p \leq k$), il faut et il suffit que l'on ait

$$(4.2.2) \quad g_1^{(r)}(0) = g_2^{(r)}(0), \quad r = 2, \dots, p.$$

En conséquence, si k est suffisamment grand, l'ordre exact du contact de γ_1, γ_2 est égal à $q - 1$, où q désigne la valuation du développement limité (suppose non nul) de $g_1 - g_2$ à l'ordre k au voisinage de l'origine.

Si $k = +\infty$ et si l'on a $g_1^{(r)}(0) = g_2^{(r)}(0)$ pour tout $r \geq 2$, on dit que le contact de γ_1 et γ_2 en M_0 est d'ordre **infini**.

Démonstration : La condition (4.2.2) est évidemment suffisante, nous démontrons qu'elle soit nécessaire. Supposons que f_1, f_2 des paramétrisations de γ_1, γ_2 telles que

$$(4.2.3) \quad f_1(0) = f_2(0) = M_0, \quad f_2(t) - f_1(t) = o(t^p).$$

Montrons que

$$(4.2.4) \quad g_2(t) - g_1(t) = o(t^p).$$

En changeant au besoin t en $-t$, nous pouvons supposer que le vecteur $f_2'(0) = f_1'(0)$ est de même sens que le vecteur $g_2'(0) = g_1'(0)$. Alors f_1 et f_2 définissent respectivement la même orientation de γ_1 et γ_2 que g_1 et g_2 . On a alors $f_1 = g_1 \circ s_1$ et $f_2 = g_2 \circ s_2$ avec

$$s_1(t) = \int_0^t |f_1'(\tau)| d\tau, \quad s_2(t) = \int_0^t |f_2'(\tau)| d\tau.$$

Or (4.2.3) implique

$$|f_2'(t)| - |f_1'(t)| = o(t^{p-1}).$$

Puisque

$$||f_2'(t)| - |f_1'(t)|| \leq |f_2'(t) - f_1'(t)|,$$

et

$$f_2'(t) - f_1'(t) = o(t^{p-1}).$$

Par intégration, on en déduit Montrons que

$$(4.2.5) \quad s_2(t) - s_1(t) = o(t^p).$$

Notons Γ_1, Γ_2 les arcs de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ respectivement définis par les paramétrisations cartésiennes :

$$G_1 : s \mapsto (s, g_1(s)); \quad G_2 : s \mapsto (s, g_2(s)).$$

Ce sont des arcs de classe C^k , simples et réguliers, le changement de paramètre défini par $s = s_j(t)$ est admissible pour $\Gamma_j, j = 1, 2$. Les arcs Γ_1, Γ_2 admettent donc respectivement les paramétrisations

$$F_1 : t \mapsto (s_1(t), f_1(t)); \quad F_2 : t \mapsto (s_2(t), f_2(t)).$$

Sous cette forme, (4.2.3) et (4.2.5) montrent que Γ_1, Γ_2 ont un contact d'ordre $\geq p$. Par application du théorème 3.2.1 aux paramétrisations cartésiennes G_1, G_2 , on voit que g_1, g_2 vérifient (4.2.4).

Corollaire 4.2.2. Soient γ_1, γ_2 deux arcs simples réguliers de classe $C^k, k \geq 2$ de \mathbb{R}^n , et soit M_0 un point commun à ces deux arcs. Pour que γ_1, γ_2 soient **osculateur** en M_0 (i. e. leur contact en M_0 soit d'ordre ≥ 2), il faut et il suffit que γ_1, γ_2 soient **tangent** en M_0 et que

- ou bien M_0 soit un point d'inflexion pour chacun d'eux;
- ou bien γ_1, γ_2 aient en M_0 même normale principale et même courbure.

En particulier, si γ est un arc simple régulier admettant le point C pour **centre de courbure** au point M , le cercle de centre C , passant par M et contenu dans le **plan osculateur** à γ en M est **osculateur** à γ en M , et c'est le **seul** cercle osculateur à γ en M .

Ce cercle est appelé le **cercle de courbure** de γ en M , ou le **cercle osculateur** à γ en M .

Démonstration : Soient g_1, g_2 des paramétrisations normales de γ_1, γ_2 vérifiant

$$g_1(0) = g_2(0) = M_0, \quad g'_1(0) = g'_2(0).$$

Pour que γ_1, γ_2 soient osculateurs, il faut et il suffit que l'on ait $g''_1(0) = g''_2(0)$. Ce qui est réalisé si et seulement si on a :

- ou bien $g''_1(0) = g''_2(0) = 0$, où M_0 est un point d'inflexion de γ_1 et γ_2 ;
 - ou bien
- $$\rho_1(0) = \rho_2(0), \text{ avec } \rho_j(0) = |g''_j(0)|, j = 1, 2 \text{ et}$$

$$\vec{v}_1(0) = \vec{v}_2(0), \text{ avec } \vec{v}_j(0) = \frac{g''_j(0)}{\rho_j(0)};$$

d'où le résultat.

4.3. Courbes planes

Le plan euclidien \mathbb{R}^2 sera supposé orienté.

Repère de Frenet

Soit γ un arc orienté et régulier de \mathbb{R}^2 défini par une paramétrisation **normale** $g : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^1 . Posons

$$(4.3.1) \quad \vec{\tau}(s) = g'(s), \quad s \in I.$$

Désignons par $\vec{\tau}_1(s)$ le **veceteur déduit de $\vec{\tau}(s)$ par la rotation de $+\pi/2$** . Si le point $M = g(s)$ est un point simple de γ , le vecteur $\vec{\tau}_1(s)$ sera appelé le **vecteur normal unitaire orienté** à γ en M , il est indépendant du choix de g .

Notons qu'un changement d'orientation de γ change à la fois $\vec{\tau}(s)$ et $\vec{\tau}_1(s)$ en leur opposés.

Si \mathbb{R}^2 est orienté par (\vec{e}_1, \vec{e}_2) , et $g'(s) = g'_1 \vec{e}_1 + g'_2 \vec{e}_2$, on a alors

$$\vec{\tau}_1 = -g'_2 \vec{e}_1 + g'_1 \vec{e}_2.$$

Courbure algébrique et formules de Frenet

Supposons que γ est de classe C^2 , En dérivant $|\vec{\tau}(s)|^2 = 1$, on obtient

$$\vec{\tau}(s) \cdot \frac{d\vec{\tau}}{ds}(s) = 0.$$

Il existe donc une fonction scalaire $\rho_1 : s \mapsto \rho_1(s)$ définie sur I vérifiant :

$$(4.3.2) \quad \frac{d\vec{\tau}}{ds}(s) = \rho_1(s)\vec{\tau}_1(s), \quad s \in I.$$

Par comparaison avec la définition de la fonction courbure, on a $\rho(s) = |\rho_1(s)|$.

La fonction ρ_1 est appelée la **fonction courbure algébrique** (ou orienté) de γ . Si $M = \gamma(s)$ est un point simple, le nombre $\rho_1(s)$ sera appelé la **courbure algébrique** de γ au point M .

Pour la fonction normale principale \vec{v} , on a

$$(4.3.3) \quad \vec{v}(s) = \vec{\tau}_1(s) \text{ si } \rho_1(s) > 0; \quad \vec{v}(s) = -\vec{\tau}_1(s) \text{ si } \rho_1(s) < 0.$$

En dérivant la relation $\vec{\tau}(s) \cdot \vec{\tau}_1(s) = 0$, on obtient

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds}(s) \cdot \vec{\tau}_1(s) + \vec{\tau}(s) \cdot \frac{d\vec{\tau}_1}{ds}(s) = 0,$$

En utilisant (4.3.2) et $|\vec{\tau}_1(s)| = 1$,

$$\vec{\tau} \cdot \frac{d\vec{\tau}_1}{ds} = -\rho_1.$$

D'autre part, puisque le vecteur $\vec{\tau}(s)$ est unitaire, on a

$$\vec{\tau}_1 \cdot \frac{d\vec{\tau}_1}{ds} = 0, \quad \frac{d\vec{\tau}_1}{ds} = -\rho_1\vec{\tau}.$$

On obtient finalement

$$(4.3.4) \quad \frac{d\vec{\tau}}{ds} = \rho_1\vec{\tau}_1, \quad \frac{d\vec{\tau}_1}{ds} = -\rho_1\vec{\tau}.$$

Cettes formules sont appelées les **formules de Frenet** pour l'arc plan γ .

Rappelons que le **centre de courbure** de γ au point $M = g(s)$ est le point C défini par

$$\overrightarrow{MC} = \frac{\vec{v}(s)}{\rho(s)}, \quad (\text{si } \rho(s) \neq 0).$$

En utilisant (4.3.3), on obtient

$$(4.3.5) \quad \overrightarrow{MC} = \frac{\vec{\tau}_1(s)}{\rho_1(s)}.$$

Le nombre $R(s) = 1/\rho_1(s)$ sera appelé le **rayon de courbure algébrique** de γ au point M .

Calcul pratique de la courbure

Par définition, pour déterminer la fonction courbure ρ , il suffit de chercher une paramétrisation normale g de γ et d'appliquer la formule

$$(4.3.6) \quad \rho(s) = |g''(s)|.$$

Mais en pratique, il n'est pas toujours possible d'expliciter la paramètre normal au moyen de fonction connues. En fait, il est rare que l'on ait intérêt à chercher effectivement une paramétrisation normale, nous allons voir comment **on peut calculer la courbure à partir d'une paramétrisation admissible quelconque de l'arc considéré**. Nous utilisons la relation déduit de (4.3.4) suivante :

$$(4.3.7) \quad \rho_1 = \vec{\tau}_1 \cdot \frac{d\vec{\tau}}{ds} = g'_1(s)g''_2(s) - g'_2(s)g''_1(s).$$

Soit $f = g \circ s$ une paramétrisation admissible quelconque de γ . On a alors

$$(4.3.8) \quad \begin{aligned} f'(t) &= g'(s) \frac{ds}{dt}, \\ f''(t) &= g'(s) \frac{d^2s}{dt^2} + g''(s) \left(\frac{ds}{dt} \right)^2. \end{aligned}$$

d'où

$$f'_1(t)f''_2(t) - f'_2(t)f''_1(t) = \left(\frac{ds}{dt} \right)^3 [g'_1(s)g''_2(s) - g'_2(s)g''_1(s)]$$

soit

$$(4.3.6a) \quad \rho_1(s) = \left(\frac{ds}{dt} \right)^{-3} [f'_1(t)f''_2(t) - f'_2(t)f''_1(t)].$$

Calcul en coordonnées cartésiennes

Soit $f(t) = (x(t), y(t))$ une paramétrisation de γ , on a alors

$$\frac{ds}{dt}(t) = [x'(t)^2 + y'(t)^2]^{1/2}.$$

La courbure algébrique de γ au point $M = f(t)$ est :

$$(4.3.6b) \quad \rho_1 = \frac{x'(t)y''(t) - y_2'(t)x''(t)}{[x'(t)^2 + y'(t)^2]^{3/2}}.$$

Calcul en coordonnées polaires

Supposons que le point $M = f(t)$ soit défini par la donnée d'un système $(r(t), \theta(t))$ de coordonnées polaires, les fonctions r, θ étant de classe $C^k, k \geq 2$. On a alors

$$(4.3.6c) \quad \rho_1 = \frac{r^2\theta'^3 + rr'\theta'' - rr''\theta' + 2r'^2\theta'}{[r'^2 + r^2\theta'^2]^{3/2}}.$$

Si on a $\theta(t) = t$ pour tout t , la formule (4.3.6c) se réduit à

$$\rho_1 = \frac{r^2 - rr'' + 2r'^2}{[r'^2 + r^2]^{3/2}}.$$

On peut toujours se ramener à ce cas par un changement de paramètre admissible lorsque γ est un arc régulier n'admettant aucune tangente passant par l'origine.

Intégrales curvilignes

Nous allons maintenant étudier l'intégration d'une forme différentielle de degré un sur un arc géométrique.

5.1. Définitions et propriétés élémentaires

Définition 5.1.1. Soient $[a, b]$ un intervalle borné de \mathbb{R} , et $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ un chemin de classe C^1 , $\omega = \sum_{j=1}^n A_j(x) dx_j$ une forme différentielle de degré un définie sur le compact $\alpha([a, b])$ (appelé l'image du chemin φ), notons par $\alpha^*\omega$ la transposée de ω par α . Le nombre

$$(5.1.1) \quad \int_a^b \alpha^*\omega = \int_a^b \omega(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt = \int_a^b \sum_{j=1}^n A_j(\alpha(t)) \alpha'_j(t) dt$$

est appelé l'intégrale de la forme ω sur le chemin α , et noté $\int_\alpha \omega$.

Remarques : L'existence de cette intégrale est assurée par la continuité de la fonction $\omega(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)$ sur $[a, b]$, donc en utilisant l'intégrale généralisée, on peut aussi définir l'intégrale d'une forme différentielle sur un chemin défini sur un intervalle non borné.

Théorème 5.1.1. Soient $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\beta : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ deux paramétrisations admissibles d'un même arc géométrique γ de classe C^1 , et soit $\theta : [a, b] \rightarrow [c, d]$ un changement de paramètre tel que $\alpha = \beta \circ \theta$.

Si ω est une forme différentielle de degré un définie sur $\text{Supp}(\gamma) = \alpha([a, b]) = \beta([c, d])$. On a alors

$$\int_a^b \alpha^*\omega = \int_c^d \beta^*\omega,$$

si θ est croissant ; et

$$\int_a^b \alpha^*\omega = - \int_c^d \beta^*\omega,$$

si θ est décroissant.

Démonstration : Comme $\alpha = \beta \circ \theta$, d'après le théorème de la transposée composée de forme différentielle, on a

$$\alpha^*\omega = (\beta \circ \theta)^*\omega = \theta^*(\beta^*\omega).$$

On pose $\beta^*\omega = A(t)dt$, on a

$$\alpha^*\omega = \theta^*(A(t)dt) = A(\theta(t))\theta'(t)dt,$$

d'après le règle de changement de variable dans l'intégrale simple,

$$\int_a^b \alpha^* \omega = \int_a^b A(\theta(t)) \theta'(t) dt = \int_{\theta(a)}^{\theta(b)} A(u) du.$$

Si θ est croissant, $\theta(a) = c, \theta(b) = d$, on a

$$\int_a^b \alpha^* \omega = \int_c^d A(u) du = \int_c^d \beta^* \omega.$$

Si θ est décroissant, $\theta(a) = d, \theta(b) = c$, on a

$$\int_a^b \alpha^* \omega = \int_d^c A(u) du = - \int_c^d A(u) du = \int_c^d \beta^* \omega.$$

On a donc démontré que **la valeur de l'intégrale d'une forme différentielle sur un chemin ne change pas lorsqu'on remplace ce chemin par un chemin positivement équivalent**. Nous pouvons alors définir l'intégrale d'une forme différentielle de degré un sur un arc géométrique orienté. On l'appelle intégrale curviligne.

Définition 5.1.2. Soit γ un arc géométrique orienté de classe C^1 , défini par une paramétrisation $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$; et soit ω une forme différentielle de degré un sur le support de γ . L'intégrale $\int_a^b \alpha^* \omega$ est appelée l'intégrale curviligne de la forme ω sur l'arc γ , et notée $\int_\gamma \omega$.

En utilisant le théorème 5.1.1, on a alors

Corollaire 5.1.1. Soient γ un arc orienté, et ω une forme différentielle définie sur le support de γ . Si γ_1 est l'arc orienté opposé à γ , on a

$$\int_{\gamma_1} \omega = - \int_\gamma \omega.$$

Si γ est égale à son opposé, on a $\int_\gamma \omega = 0$ pour toute forme différentielle ω définie sur le support de γ .

Exemple

Soit C une circonférence de centre (a, b) et de rayon R dans le plan \mathbb{R}^2 , ne passant pas par l'origine, parcourue dans le sens direct, et

$$\omega = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2},$$

calculer $\int_C \omega$.

On paramétrise d'abord C par

$$x = a + R \cos t, \quad y = b + R \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_C \omega &= \int_0^{2\pi} \frac{(a + R \cos t)R \cos t - (b + R \sin t)(-R \sin t)}{(a + R \cos t)^2 + (b + R \sin t)^2} dt, \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{R^2 + R(a \cos t + b \sin t)}{a^2 + b^2 + R^2 + 2R(a \cos t + b \sin t)} dt, \end{aligned}$$

posons $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, alors il existe t_0 tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$a \cos t + b \sin t = c \cos(t - t_0),$$

d'où

$$\begin{aligned} \int_C \omega &= \int_{-t_0}^{2\pi-t_0} \frac{R^2 + Rc \cos t}{c^2 + R^2 + 2Rc \cos t} dt, \\ &= \frac{1}{2} \int_{-t_0}^{2\pi-t_0} dt + \frac{1}{2}(R^2 - c^2) \int_{-t_0}^{2\pi-t_0} \frac{dt}{c^2 + R^2 + 2Rc \cos t}, \end{aligned}$$

avec changement de variable $x = \operatorname{tg}(t/2)$, on a alors

$$\int_C \omega = \pi \left(1 + \frac{R^2 - c^2}{|R^2 - c^2|} \right) = \begin{cases} 0, & \text{si } a^2 + b^2 = c^2 > R^2 \\ 2\pi, & \text{si } a^2 + b^2 = c^2 < R^2 \end{cases}$$

Arcs particulier

a) Soit γ l'arc orienté défini par $y = \varphi(x)$, $a \leq x \leq b$, et soit $\omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ où P, Q sont bien définies sur le graphe de φ , on a

$$(5.1.2) \quad \int_{\gamma} \omega = \int_a^b [P(x, \varphi(x)) + Q(x, \varphi(x))\varphi'(x)] dx.$$

b) Soit γ un segment parallèle à l'axe des x ($\varphi = \text{const}$), on a alors

$$(5.1.3) \quad \int_{\gamma} Q(x, y) dy = 0, \quad \int_{\gamma} P(x, y) dx = \int_a^b P(x, x) dx.$$

c) Soit γ un segment parallèle à l'axe des y , on a alors

$$(5.1.4) \quad \int_{\gamma} P(x, y) dx = 0.$$

5.2. Intégrale de forme différentielle exacte

Théorème 5.2.1. *Soit γ un arc géométrique orienté de classe C^1 , défini par une paramétrisation $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ et soit f une fonction de classe C^1 sur un voisinage du support de γ . Alors l'intégrale sur γ de la forme $\omega = df$ est égale à*

$$(5.2.1) \quad \int_{\gamma} \omega = f(B) - f(A),$$

où $A = \alpha(a)$ l'origine de γ , et $B = \alpha(b)$ son extrémité.

En particulier, si γ est un arc fermé, on a alors $\int_{\gamma} \omega = 0$.

On a donc démontré que si la forme ω est exacte, l'intégrale de cette forme sur un arc ne dépend que des extrémités de cet arc.

Démonstration : On a d'abord

$$\omega = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} dx_j,$$

et

$$\alpha^*\omega(t) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f(\varphi(t))}{\partial x_j} \varphi'_j(t) dt = d(f \circ \alpha)(t).$$

Posons $F = f \circ \varphi$, on a alors

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b \alpha^*\omega = \int_a^b F'(t) dt = F(b) - F(a) = f(B) - f(A).$$

Application du théorème 5.2.1

a) Si ω est une forme exacte, (on peut utiliser le théorème de Poincaré pour le vérifier), pour calculer intégrale curviligne de ω sur un arc γ , on peut chercher d'abord les primitives de ω , puis utiliser (5.2.1). S'il n'est pas facile de trouver les primitives de ω , on peut essayer de changer un autre arc $\tilde{\gamma}$ qui possède les mêmes extrémités de γ , et le calcul de $\int_{\tilde{\gamma}} \omega$ est possible plus facile.

b) Si ω est une forme exacte, γ est un arc avec extrémités $B = x, A = x_0 \in \mathbb{R}^n$, alors $f(x) = \int_{\gamma} \omega + f(x_0)$ est une primitive de ω .

c) On peut utiliser ce théorème pour vérifier qu'une forme différentielle ω n'est pas exacte, il suffit d'exhiber un arc fermé γ tel que l'on ait $\int_{\gamma} \omega \neq 0$.

Donc $\omega = (x dy - y dx)(x^2 + y^2)^{-1}$ n'est pas exacte sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, parce que pour toute circonférence C contenant l'origine à son intérieur, on a $\int_C \omega = 2\pi$.

Image d'un arc par une application différentiable

Soit γ un arc orienté de classe C^1 défini par la paramétrisation $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^{n_1}$, soit U un ouvert de \mathbb{R}^{n_1} contenant le support de γ , et $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^{n_2}$ une application de classe C^1 . La paramétrisation $\beta = \Phi \circ \alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^{n_2}$ définit un arc orienté de classe C^1 , appelée image de γ et noté $\Phi(\gamma)$. Soit ω une forme différentielle de degré un sur le support de $\Phi(\gamma)$. Par définition, on a

$$(5.2.2) \quad \int_{\Phi(\gamma)} \omega = \int_a^b (\Phi \circ \alpha)^*\omega = \int_a^b \alpha^*(\Phi^*\omega) = \int_{\gamma} \Phi^*\omega.$$

5.3. Formule de Riemann-Green dans le plan

On dit qu'un arc orienté γ est de classe C^1 par morceaux, s'il est continu, et est constitué par les arcs orientés $\gamma_1, \dots, \gamma_N$ de classe C^1 . Soit ω une forme différentielle de degré un définie sur le support de γ , nous poserons, **par définition**

$$(5.3.1) \quad \int_{\gamma} \omega = \sum_{j=1}^N \int_{\gamma_j} \omega.$$

Nous admettons que le nombre ainsi obtenu est indépendant de la décomposition choisie de γ .

Remarque : γ n'est pas toujours connexe.

Soit K un compact plan, dont la frontière ∂K se compose d'un nombre fini d'arcs de classe C^1 . Nous allons orienter ∂K . Nous orientons d'abord le plan. Soit (O, x, y) un repère orthonormal, nous conviendrons que le demi-plan positif défini par $y \geq 0$ est à gauche de l'axe Ox , donc l'axe Oy se déduit de Ox par une rotation d'angle $+\pi/2$, et le sens positif de rotation est alors celui qui va "de la droite vers la gauche".

Orientation de ∂K

L'orientation de ∂K est déterminée par la condition qu'un mobile parcourant ∂K dans le sens indiqué a constamment le compact à sa gauche. Muni cette orientation, on appelle ∂K le bord orienté du compact K .

Pour une forme différentielle ω de degré un de classe C^1 , définie sur un voisinage de K , nous allons transformer l'intégrale curviligne de ω sur la frontière orientée ∂K , en une intégrale double étendue à K . Nous allons d'abord démontrer pour les cas élémentaires.

a) Compact élémentaire plan

Soit K le compact plan défini par les inégalités

$$(5.3.2) \quad a \leq x \leq b, \quad \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x),$$

où φ_1, φ_2 deux fonctions continues sur l'intervalle $[a, b]$ vérifiant $\varphi_1 < \varphi_2$ sur $]a, b[$,

Soit P une fonction de classe C^1 définie sur un voisinage de K , on a alors

$$\begin{aligned} \iint_K \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dx dy &= \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dy \\ &= \int_a^b P(x, \varphi_2(x)) dx - \int_a^b P(x, \varphi_1(x)) dx. \end{aligned}$$

Mais on a

$$\begin{aligned} \int_{S_1} P(x, y) dx &= \int_{S_2} P(x, y) dx = 0, \\ \int_a^b P(x, \varphi_2(x)) dx &= - \int_{C_2} P(x, y) dx, \\ \int_a^b P(x, \varphi_1(x)) dx &= \int_{C_1} P(x, y) dx. \end{aligned}$$

On a donc montré

$$(5.3.3) \quad \iint_K \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dx dy = - \int_{\partial K} P(x, y) dx$$

Échangeons les rôles des variables x, y et considérons un compact K' défini par les inégalités

$$(5.3.4) \quad c \leq y \leq d, \quad \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y),$$

où ψ_1, ψ_2 deux fonctions continues sur l'intervalle $[c, d]$ vérifiant $\psi_1 < \psi_2$ sur $]c, d[$. Si Q est une fonction de classe C^1 définie sur un voisinage de K' , on a alors

$$(5.3.5) \quad \iint_{K'} \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) dx dy = \int_{\partial K'} Q(x, y) dy.$$

Définition 5.3.1. On appelle compact élémentaire plan, s'il peut être défini à la fois par les inégalités de (5.3.2) et de (5.3.4).

Exemple : Le disque $D = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq R^2\}$ est un compact élémentaire plan, car D peut être défini par

$$\begin{aligned} -R \leq x \leq R, \quad -\sqrt{R^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2}; \\ -R \leq y \leq R, \quad -\sqrt{R^2 - y^2} \leq x \leq \sqrt{R^2 - y^2}. \end{aligned}$$

Soit maintenant K un compact élémentaire plan, on a alors que (5.3.3) et (5.3.5) impliquent

$$(5.3.6) \quad \iint_K \left[\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right] dx dy = \int_{\partial K} P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

b) Compact simple

Définition 5.3.2. On appelle compact simple, s'il peut être découpé en un nombre fini de compacts élémentaires au moyen de parallèles aux axes.

Soit $K = \bigcup_{j=1}^N K_j$, où $\{K_j\}$ une découpage comme dans la définition 5.3.2, en utilisant (5.3.6), on a

$$\begin{aligned} \iint_K \left[\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right] dx dy &= \sum_{j=1}^N \iint_{K_j} \left[\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right] dx dy \\ &= \sum_{j=1}^N \int_{\partial K_j} P(x, y) dx + Q(x, y) dy. \end{aligned}$$

On étudie maintenant la réunion des arcs orientés ∂K_j . Elle se compose de deux parties, ∂K et des "cloisons" qui ont servi au découpage de K . Chacune des ces cloisons fait partie du bord de deux (et seulement deux) compact K_i, K_j situés de part et d'autre d'elle, elle est donc parcourue deux fois **en sens inverse**. Les intégrales de la forme différentielle $\omega = P dx + Q dy$ correspondant à ces deux arcs orientés **se détruisent** donc, et il reste au total

$$\sum_{j=1}^N \int_{\partial K_j} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{\partial K} P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

On a finalement montré le théorème suivant.

Théorème 5.3.1. (Formule de Riemann-Green)

Soient K un compact simple, ∂K le bord orienté, et $Pdx+Qdy$ une forme différentielle de degré un de classe C^1 définie sur K , on a alors

$$(5.3.7) \quad \iint_K \left[\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right] dx dy = \int_{\partial K} P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

Remarque : Cette formule est aussi vraie pour tout compact plan K dont la frontière se compose d'un nombre fini d'arcs réguliers de classe C^1 .

Intégration par partie dans le plan

Soient f, g deux fonctions de classe C^1 définies dans un voisinage de compact plan K dont la frontière se compose d'un nombre fini d'arcs réguliers de classe C^1 . On a alors les **formules d'intégration par partie dans le plan** :

$$(5.3.8) \quad \begin{aligned} \iint_K (\partial_x f(x, y)) g(x, y) dx dy &= - \iint_K f(x, y) (\partial_x g(x, y)) dx dy \\ &+ \int_{\partial K} f(x, y) g(x, y) dy. \end{aligned}$$

et

$$(5.3.9) \quad \begin{aligned} \iint_K (\partial_y f(x, y)) g(x, y) dx dy &= - \iint_K f(x, y) (\partial_y g(x, y)) dx dy \\ &- \int_{\partial K} f(x, y) g(x, y) dx. \end{aligned}$$

En effet, on a

$$\begin{aligned} \iint_K (\partial_x f(x, y)) g(x, y) dx dy &= \iint_K \partial_x [f(x, y) g(x, y)] dx dy \\ &- \iint_K f(x, y) (\partial_x g(x, y)) dx dy, \end{aligned}$$

par application la formule (5.3.7) à la fonction $Q(x, y) = f(x, y)g(x, y)$, on obtient (5.3.8). La même pour (5.3.9) avec $P(x, y) = -f(x, y)g(x, y)$.

Théorème 5.3.2. Soit K un compact plan dont la frontière se compose d'un nombre fini d'arcs réguliers de classe C^1 . Supposons que f, g soient deux fonctions de classe C^k , $k \geq 1$ définies dans un voisinage de K , et

$$(5.3.10) \quad \frac{\partial^{j+\ell} f}{\partial x^j \partial y^\ell}(x, y) = 0, \quad \forall (x, y) \in \partial K, \quad \forall j, \ell \in \mathbb{N}, \quad j + \ell \leq k - 1.$$

On a alors

$$(5.3.11) \quad \iint_K \frac{\partial^{j+\ell} f(x, y)}{\partial x^j \partial y^\ell} g(x, y) dx dy = (-1)^{j+\ell} \iint_K f(x, y) \frac{\partial^{j+\ell} g(x, y)}{\partial x^j \partial y^\ell} dx dy, \quad \forall j + \ell \leq k.$$

En effet, les conditions (5.3.10) impliquent que toutes intégrales sur le bord ∂K sont nulles, donc on peut démontrer (5.3.11) par récurrence avec (5.3.8) et (5.3.9).

Calculer l'aire d'un domaine

Posons $P = -y, Q = x$ dans la formule de Riemann-Green, on obtient une formule pour calculer l'aire d'un domaine D .

$$(5.3.12) \quad S(D) = \iint_D dx dy = \frac{1}{2} \int_{\partial D} x dy - y dx.$$

5.4. Intégrale de forme différentielle fermée dans \mathbb{R}^2

Théorème 5.4.1. *Soit ω une forme différentielle de degré un définie sur un ouvert K simplement connexe de \mathbb{R}^2 , l'intégrale de ω sur un arc γ ne dépend que des extrémités de cet arc si et seulement si ω est une forme différentielle fermée sur K .*

Démonstration : On montre d'abord la réclamation suivante :

L'intégrale de ω sur un arc ne dépend que des extrémités de cet arc si et seulement si pour tous les arcs fermés β , on a $\int_{\beta} \omega = 0$.

Soient γ_1, γ_2 deux arcs de classe C^1 définis par les paramétrisations respectives : $\varphi_1 : [a, b] \rightarrow K; \varphi_2 : [c, d] \rightarrow K$ vérifiant $\varphi_1(a) = \varphi_2(c), \varphi_1(b) = \varphi_2(d)$. Soit γ_2^- l'arc avec l'orientation opposée à γ_2 , alors $\gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2^-$ est un arc fermé orienté de classe C^1 par morceau. On a

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2^-} \omega = \int_{\gamma_1} \omega - \int_{\gamma_2} \omega.$$

Soit β un arc fermé avec le support dans K , on peut alors toujours découper β en deux parties β_1, β_2 . Désignons par β_2^- l'arc avec l'orientation opposée à β_2 , β_1, β_2^- vérifient la condition de γ_1, γ_2 , donc

$$\int_{\beta} \omega = \int_{\beta_1} \omega + \int_{\beta_2^-} \omega = \int_{\beta_1} \omega - \int_{\beta_2} \omega,$$

d'où $\int_{\beta} \omega = 0$, si et seulement si $\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$.

Soit $\omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ une forme différentielle fermée, et β un arc fermé de K , on a alors

$$\int_{\beta} P dx + Q dy = \iint_D \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right] dx dy = 0.$$

Donc $\int_{\gamma} \omega$ ne dépend que des extrémités de γ .

Réciproquement, si $\int_{\gamma} \omega$ ne dépend que des extrémités de γ pour tous les arcs de K , alors pour tous les arcs β fermés, on a $\int_{\beta} \omega = 0$. Si ω n'est pas une forme différentielle fermée, alors il existe $(x_0, y_0) \in K$ tel que

$$\left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right] (x_0, y_0) \neq 0.$$

Comme $\frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}$ sont continues sur K , il existe $r > 0$ tel que sur le disque $B((x_0, y_0), r)$, on a

$$\left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right] (x, y) > 0, \quad (\text{ou } < 0).$$

Donc

$$\int_{\partial B} Pdx + Qdy = \iint_B \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right] dxdy > 0.$$

Comme ∂B est bien un arc fermé de K , on obtient une contradiction, donc ω doit être une forme différentielle fermée.

Remarque : La connexité simple de K est une condition très importante. Précisément, quelque soit un arc régulier fermé de K il doit boucler un domaine sur lequel ω est une forme différentielle bien définie. Voir le contre-exemple.

Exemple : $\omega = (xdy - ydx)(x^2 + y^2)^{-1}$ est une forme différentielle fermée sur $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \epsilon^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ pour tous $\epsilon > 0$. Alors le cercle C défini par $x = \cos \theta, y = \sin \theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ est bien un arc fermé dans K , mais on sait que $\int_C \omega = 2\pi \neq 0$, il n'y a pas de contradiction car C boucle le disque et ω n'est pas définie en $(0, 0)$. En fait, quelque soit un arc régulier fermé γ qui ne passe pas par l'origine mais avec l'origine à son intérieur, si son orientation est directe par rapport à l'origine, on a aussi $\int_\gamma \omega = 2\pi$. On peut prendre $\epsilon > 0$ assez petit telle que le cercle C_ϵ de rayon ϵ et de centre $(0, 0)$, et l'arc γ boucle un compact D de \mathbb{R}^2 , alors ω est fermée sur D , et d'après la formule de Riemann-Green, on a

$$0 = \iint_D 0dxdy = \int_{\partial D} \omega = \int_\gamma + \int_{C_\epsilon^-} \omega,$$

comme l'orientation de C_ϵ^- est opposée à C_ϵ , on a

$$\int_{C_\epsilon^-} \omega = - \int_{C_\epsilon} \omega = -2\pi,$$

donc

$$\int_\gamma \omega = 2\pi.$$

Théorème 5.4.2. *Soit U un ouvert connexe simple de \mathbb{R}^2 , soit ω une forme différentielle définie sur U . Alors ω est exacte si et seulement si ω est fermée.*

Démonstration : Il nous suffit de montrer qu'une forme fermée est exacte. Soit alors ω une forme différentielle fermée définie sur U , alors l'intégrale de ω sur un arc de U ne dépend que des extrémités de cet arc. Soit γ un arc avec les extrémités (x_0, y_0) et (x, y) , on peut écrire

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \omega = \int_\gamma \omega,$$

pour $(x_0, y_0) \in U$ un point fixé, $u(x, y)$ est une fonction bien définie sur U . On montre que u est une primitive de ω , i.e. pour $\omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$, on montre $\frac{\partial u}{\partial x} =$

$P, \frac{\partial u}{\partial y} = Q$. Pour $h \in \mathbb{R}$, $|h|$ assez petit, on a

$$\begin{aligned} u(x+h, y) - u(x, y) &= \int_{(x_0, y_0)}^{(x+h, y)} \omega - \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \omega \\ &= \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \omega + \int_{(x, y)}^{(x+h, y)} \omega - \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \omega \\ &= \int_{(x, y)}^{(x+h, y)} Pdx + Qdy. \end{aligned}$$

Pour $|h|$ assez petit, on peut choisir l'arc qui joint (x, y) à $(x+h, y)$ comme un segment, alors

$$\int_{(x, y)}^{(x+h, y)} Qdy = 0,$$

utilisons la formule moyenne, il existe $0 < \theta < 1$ tel que

$$u(x+h, y) - u(x, y) = hP(x+\theta h, y),$$

laisser $h \rightarrow 0$, on obtient $\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = P(x, y)$ pour tout $(x, y) \in U$. De même on a $\frac{\partial u}{\partial y} = Q$, donc u est une primitive de ω .

Calcul pratique

On peut alors utiliser ce théorème pour calculer les primitives d'une forme différentielle fermée ω dans \mathbb{R}^2 par la formule

$$(5.4.1) \quad u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \omega = \int_{\gamma} \omega,$$

mais il faut bien choisir le point de départ (x_0, y_0) et l'arc γ .

Exemple : Montrer que $\omega = (2x + \sin y)dx + x \cos y dy$ est une forme différentielle exacte, et calculer les primitives.

On a $P(x, y) = 2x + \sin y$, $Q(x, y) = x \cos y$ et

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \cos y = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Donc ω est une forme différentielle fermée sur \mathbb{R}^2 . D'après le théorème précédent, ω est exacte. Pour $(0, 0), (x, y) \in \mathbb{R}^2$, on prend l'arc γ qui joint ces deux points comme la réunion de segment $C_1 = \overrightarrow{(0, 0)(x, 0)}$ et $C_2 = \overrightarrow{(x, 0)(x, y)}$, donc les primitives de ω sont

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_{C_1} (2x + \sin y)dx + x \cos y dy \\ &+ \int_{C_2} (2x + \sin y)dx + x \cos y dy + C \\ &= \int_0^x 2x dx + \int_x^y x \cos y dy + C = x^2 + x \sin y + C. \end{aligned}$$

Donc pour une forme différentielle de deux variables, on a une méthode pratique pour calculer les primitives.

5.5. Formule du changement de variables pour les intégrales doubles

Nous pouvons utiliser la formule de Riemann-Green pour démontrer la formule de changement de variable relative aux intégrales doubles. On a ainsi :

Théorème 5.5.1. *Soient H, K deux compacts plans simples limités par des arcs de classe C^1 par morceaux, et soit $\varphi : H \rightarrow K$ une bijection de classe C^1 définissant un homéomorphisme de H sur K , telle que ∂K soit l'image par φ de ∂H .*

Alors, pour toute fonction numérique f , de classe C^1 sur K , on a

$$(5.5.1) \quad \iint_K f(x, y) dx dy = \iint_H f(X(u, v), Y(u, v)) J_\varphi(u, v) du dv,$$

où $\varphi(u, v) = (X(u, v), Y(u, v))$ et $J_\varphi = X'_u Y'_v - X'_v Y'_u$ est le **jacobien** de φ .

Démonstration : On suppose d'abord que K est défini par des inégalités de la forme

$$(5.5.2) \quad \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), \quad a \leq x \leq b,$$

où φ_1, φ_2 sont deux fonctions continues sur $[a, b]$ et de classe C^1 sur $]a, b[$. Posons

$$P(x, y) = \int_{\varphi_1(x)}^y f(x, t) dt,$$

on a alors $P \in C^1(K)$ et $P'_y = f$. Par application de la formule de Riemann-Green à K , on obtient

$$\iint_K f(x, y) dx dy = \iint_K P'_y(x, y) dx dy = - \int_{\partial K} P(x, y) dx.$$

Posons $\alpha = P dx$, puisque $\partial K = \varphi(\partial H)$, en utilisant (5.2.2), on a

$$\begin{aligned} \int_{\partial K} \alpha &= \int_{\partial H} \varphi^* \alpha = \int_{\partial H} P(X(u, v), Y(u, v)) dX(u, v) \\ &= \int_{\partial H} P(X(u, v), Y(u, v)) [X'_u(u, v) du + X'_v(u, v) dv] \\ &= \int_{\partial H} [P(X(u, v), Y(u, v)) X'_u(u, v)] du + [P(X(u, v), Y(u, v)) X'_v(u, v)] dv. \end{aligned}$$

Par une nouvelle application de la formule de Riemann-Green à H , on a

$$\begin{aligned} \int_{\partial K} \alpha &= \iint_H \left[\frac{\partial}{\partial u} (P(X(u, v), Y(u, v)) X'_u(u, v)) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial v} (P(X(u, v), Y(u, v)) X'_v(u, v)) \right] du dv. \end{aligned}$$

Soit, après simplifications :

$$\int_{\partial K} \alpha = \iint_H P'_y(X(u, v), Y(u, v)) [X'_v(u, v) Y'_u(u, v) - X'_u(u, v) Y'_v(u, v)] du dv.$$

On a donc finalement

$$\iint_K f(x, y) dx dy = - \int_{\partial K} \alpha = \iint_H f(X(u, v), Y(u, v)) J_\varphi(u, v) du dv.$$

Si K est un compact simple, on peut par définition, décomposer K en un nombre fini de compacts K_j définis par des inégalités de la forme (5.5.2). En appliquant la formule (5.5.1) à chacun des couples de compacts $H_j = \varphi^{-1}(K_j)$, K_j , on obtient le résultat du théorème.