

Cours de Licence-3 de mathématiques

# Calculs différentielles

Chao-Jiang XU  
Département de Mathématiques  
Université de Rouen  
76801 Saint-Etienne du Rouvray, France  
**Année 2008–2009**





## Table des matières

Chapitre 1. Espaces vectoriels normés	1
1.1. Définitions et propriétés élémentaires	1
1.2. Espaces d'applications linéaires	3
1.3. Applications multilinéaires	5
Chapitre 2. Applications différentiables	7
2.1. Dérivées partielles de fonction de plusieurs variables	7
2.2. La différentielle	9
2.3. Différentielles d'applications particulières	10
2.4. Espaces produits	13
2.5. Quelques applications	16
Chapitre 3. Théorème des accroissements finis	19
3.1. Applications de la variable réelle	19
3.2. Cas général	20
3.3. Quelques applications	23
3.4. Intégration des fonctions à valeurs dans e.v.n.	24
3.5. Différentielles d'ordre supérieur. Formule de Taylor	27
3.6. Extrema relatifs	28
Chapitre 4. Théorème d'inversion locale	31
4.1. Théorème d'inversion locale	31
4.2. Théorème des fonctions implicites	35
4.3. Applications	37



## CHAPITRE 1

### Espaces vectoriels normés

Dans ce cours nous travaillerons seulement sur les espaces vectoriels réels de dimension finie.

#### 1.1. Définitions et propriétés élémentaires

**Définition 1.1.1.** Soit  $M$  un ensemble non-vidé. On appelle **distance** sur  $M$  toute application  $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant, pour tous  $x, y, z \in M$ ,

- (a)  $d(x, y) \geq 0$  et  $d(x, y) = 0$  si et seulement si  $x = y$  ;
- (b)  $d(x, y) = d(y, x)$  ;
- (c)  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  (inégalité triangulaire).

$M$  muni d'une distance s'appelle un **espace métrique**.

**Définition 1.1.2.** Soit  $E$  un espace vectoriel. On appelle **norme** sur  $E$  toute application  $\| \cdot \| : E \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant :

- (a)  $\|x\| \geq 0$  et  $\|x\| = 0$  si et seulement si  $x = 0$  ;
- (b)  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$  et tout  $x \in E$  ;
- (c)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  pour tous  $x, y \in E$  (inégalité triangulaire).

Un espace vectoriel muni d'une norme s'appelle un **espace vectoriel normé**, et se note *e.v.n.*.

#### Remarque

1) Une norme  $\| \cdot \|$  sur  $E$  définit une distance  $d$  sur  $E$  par la formule  $d(x, y) = \|x - y\|$ . Elle vérifie  $d(x + z, y + z) = d(x, y)$ , invariante par translation, et  $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y)$  invariante par homothétie.

2) Il est clair que toute distance n'est pas invariante par translation et homothétie (ex : la distance discrète), donc toute distance sur un espace vectoriel n'est pas nécessairement définie par une norme.

**Définition 1.1.3.** Soit  $E$  un espace vectoriel normé. Une suite  $(x_n; n \in \mathbb{N})$  d'éléments de  $E$  est appelée **suite de Cauchy** si  $\|x_n - x_m\| \rightarrow 0$  lorsque  $n, m \rightarrow \infty$ .  $E$  est dit **complet** si toute suite de Cauchy  $(x_n)$  dans  $E$  converge vers un élément  $x \in E$ . On appelle **espace de Banach** un espace vectoriel normé complet.

Tout espace normé de dimension finie est complet, mais ce résultat est faux en dimension infinie.

**Définition 1.1.4.** Soit  $E$  un espace vectoriel,  $\| \cdot \|_1$  et  $\| \cdot \|_2$  deux normes sur  $E$ . On dit que ces deux normes sont équivalentes s'il existe deux réels  $c > 0, C > 0$  tels que

$$c\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C\|x\|_1, \quad \forall x \in E.$$

Il est évident que si  $(x_n)$  est une suite de Cauchy pour une norme  $\| \cdot \|$ , elle reste une suite de Cauchy pour toute norme équivalente.

Nous admettons le résultat important suivant qui sera démontré dans le cours de TD.

**Théorème 1.1.1.** *Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie. Alors toutes les normes sur  $E$  sont équivalentes.*

Remarquons que ce résultat est faux en dimension infinie.

**Définition 1.1.5.** *Soit  $E$  un espace normé,  $x$  un point de  $E$ ,  $r$  un réel  $\geq 0$ . On appelle boule ouverte (resp. fermée) et on note  $B(x, r)$  (resp.  $\bar{B}(x, r)$ ) l'ensemble  $\{y \in E; \|x - y\| < r\}$  ( $\{y \in E; \|x - y\| \leq r\}$ ). On appelle  $B(0, 1)$  (resp.  $\bar{B}(0, 1)$ ) la boule unité (resp. la boule unité fermée). Un ouvert de  $E$  est un ensemble  $U \subset E$  tel que, pour tout  $x \in U$ , il existe  $r > 0$  tel que  $B(x, r) \subset U$ . Un ensemble  $F \subset E$  est appelé un fermé si le complémentaire de  $F$  est ouvert.*

Soit  $E$  un espace vectoriel réel,  $\| \cdot \|_1$  et  $\| \cdot \|_2$  deux normes équivalentes sur  $E$ . Alors ces deux normes équivalentes définissent les mêmes ouverts. Il en résulte que les ouverts et fermés d'un espace normé de dimension finie ne dépendent pas de la norme choisie.

Un sous ensemble  $F$  d'un espace normé est fermé si et seulement si  $F$  possède la propriété suivante : Soit  $(x_n)$  une suite d'éléments de  $F$  et supposons que  $x_n \rightarrow x$  (c.à.d.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$ ). Alors  $x \in F$ .

Soit  $E$  un espace vectoriel normé. Un sous ensemble  $K \subset E$  est dit **compact** s'il possède la propriété suivante : Soit  $(x_n)$  une suite d'éléments de  $K$ . Alors  $(x_n)$  contient au moins une sous suite  $(x_{n_k})$  qui converge vers un élément  $x$  appartenant dans  $K$ . Un compact est toujours fermé. Ceci est démontré dans le cours de topologie comme plusieurs résultats ci-dessous.

**Définition 1.1.6.** *Soit  $(E, \| \cdot \|)$  un espace normé, une partie  $A$  de  $E$  est dite bornée s'il existe  $R > 0$  tel que  $A \subset B(0, R)$ .*

Dans le cours de topologie, on a démontré le résultat suivant : Tout compact d'un espace normé est un fermé borné. Tout fermé borné d'un espace normé de **dimension finie** est compact.

**Définition 1.1.7.** *Soit  $E, F$  deux espaces normés,  $U$  un sous ensemble de  $E$ ,  $f : U \rightarrow F$ . On appellera  $f$  une fonction ou une application, on dit que  $f$  est continue au point  $a \in U$  si pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que*

$$\|f(x) - f(a)\| \leq \varepsilon,$$

pour tout  $x \in U$  vérifiant  $\|x - a\|_E < \delta$ .

Une fonction  $f : U \rightarrow F$  est dite continue sur  $U$  si  $f$  est continue en tout point de  $U$ .

On a alors les résultats suivants :

**Proposition 1.1.1.** *Les affirmations suivantes sont équivalentes :*  
(a)  $f$  est continue au point  $a$ .

(b) Si  $(x_n)$  est une suite d'éléments de  $U$  qui converge vers  $a$ , alors  $f(x_n)$  converge vers  $f(a)$  dans  $F$ .

(c) L'image inverse de toute boule ouverte de centre  $f(a)$  contient une boule ouverte de centre  $a$ .

(d) L'image inverse de tout ouvert contenant  $f(a)$  contient un ouvert contenant  $a$ .

La démonstration de ces résultats est laissée comme exercice au lecteur (cf. le cours de topologie).

**Théorème 1.1.2.** Soit  $U$  un sous ensemble de  $E$ ,  $f : U \rightarrow F$  une application continue au point  $a \in U$ . Alors  $f$  reste continue en  $a$  si on remplace les normes dans  $E$  et  $F$  par des normes équivalentes.

Soit  $U$  un ouvert de  $E$ , alors  $f$  est continue sur  $U$  si et seulement si l'image inverse de tout ouvert de  $F$  est un ouvert de  $U$ .

La première partie est une conséquence immédiate de la définition. Pour la deuxième partie, on peut trouver dans le cours de topologie. Les conclusions suivantes sont aussi démontrées dans le cours de topologie.

Soit  $K$  un compact de l'espace normé  $E$ ,  $f$  une fonction continue sur  $K$  à valeur réelles. Alors  $f$  est bornée et atteint ses bornes.

Soit  $E$  et  $F$  deux espaces normés,  $Y = (y_1, \dots, y_m)$  une base de  $F$ ,  $U \subset E$ ,  $f : U \rightarrow F$ ,  $f_1, \dots, f_m$  les composantes de  $f$  dans la base  $Y$ . Alors  $f$  est continue sur  $U$  si et seulement si chacune des fonctions  $f_1, \dots, f_m$  définies sur  $U$  à valeurs réelles est continue.

La composée de deux applications continues est continue.

**Proposition 1.1.2.** L'application  $\| \cdot \| : E \rightarrow \mathbb{R}$  est une application continue.

En effet on a pour tous  $x, y \in E$ ,  $\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|$  donc  $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$ . De même  $\|y\| - \|x\| \leq \|x - y\|$ . Donc la continuité découle du fait que  $\| \|x\| - \|y\| \| \leq \|x - y\|$ .

Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de l'espace normé  $E$ ,  $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \in E$ , posons

$$\begin{aligned} \|x\|_1 &= |x_1| + \dots + |x_n|, \\ \|x\|_\infty &= \sup\{|x_1|, \dots, |x_n|\}, \\ \|x\|_2 &= \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}. \end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que  $\| \cdot \|_1$  et  $\| \cdot \|_\infty$  sont des normes. Quant à  $\| \cdot \|_2$ , nous avons établi en DEUG que c'était une norme.

$\| \cdot \|_\infty$  s'appelle la norme uniforme,  $\| \cdot \|_2$  la norme euclidienne (relativement à la base  $(e_1, \dots, e_n)$ ).

## 1.2. Espaces d'applications linéaires

Nous considérons à présent des applications linéaires  $f : E \rightarrow F$ , noté  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ , c'est-à-dire que  $E, F$  sont des espaces vectoriels normés, et pour tout  $x, y \in E$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , on a

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y).$$

**Théorème 1.2.1.** Soient  $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F)$  deux e.v.n. de dimension finie,  $f$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$ . Alors  $f$  est continue.

**Remarque :** Cette proposition est fautive en dimension infinie.

**Démonstration :** Montrons tout d'abord qu'une forme linéaire  $g : E \rightarrow \mathbb{R}$  est continue. Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$  et soit  $\lambda_j = g(e_j), j = 1, 2, \dots, n$ . On a  $g(x_1e_1 + \dots + x_ne_n) = \sum_{j=1}^n x_j\lambda_j$ , donc

$$|g(x_1e_1 + \dots + x_ne_n)| \leq \sum_{j=1}^n |x_j|\lambda_j \leq M \sum_{j=1}^n |x_j| \leq M\|x\|_1,$$

où  $M = \sup_j |\lambda_j|$ . Donc pour tout  $\varepsilon > 0$ , si  $x, y \in E, \|x - y\|_1 < \varepsilon/M$ , on a alors

$$|g(x) - g(y)| = |g(x - y)| \leq M\|x - y\|_1 < \varepsilon.$$

C'est-à-dire que  $g$  est continue pour la norme  $\|\cdot\|_1$ , donc pour la norme  $\|\cdot\|_E$  car toutes les normes sont équivalentes en dimension finie.

Ensuite soit  $(y_1, \dots, y_m)$  une base de  $F, f_1, \dots, f_m$  les composantes de  $f$  dans cette base. D'après ce qui précède, chaque composante  $f_j$  est continue, donc  $f$  est continue.

**Théorème 1.2.2.** Soient  $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F)$  deux espaces normés de dimension finie, et pour tout  $f : E \rightarrow F$ , posons

$$M(f) = \sup_{\{x \in E; \|x\|_E=1\}} \|f(x)\|_F.$$

Alors  $M(\cdot)$  ainsi défini est une norme sur  $\mathcal{L}(E, F)$ . De plus, pour tout  $f \in \mathcal{L}(E, F), x \in E$ , on a

$$\|f(x)\|_F \leq M(f)\|x\|_E,$$

et  $M(f)$  est la plus petite constante vérifiant cette inégalité. Finalement on peut remplacer  $\{x \in E; \|x\|_E = 1\}$  par  $\{x \in E; \|x\|_E \leq 1\}$  dans la définition de  $M(f)$ .

**Démonstration :** Comme l'ensemble  $\{x \in E; \|x\|_E = 1\}$  est fermé et borné (pourquoi?), donc il est compact car  $\dim E < \infty$ . De plus  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ , donc en vertu du théorème 1.2.1,  $f$  est continue, on a aussi  $\|\cdot\|_F : F \rightarrow \mathbb{R}$  est continue selon la proposition 1.1.2, donc

$$\|f(\cdot)\|_F : E \rightarrow \mathbb{R}$$

est continue. Alors  $\|f(\cdot)\|_F$  est bornée et atteint sa borne  $M(f) < \infty$  sur la sphère  $\{x \in E; \|x\|_E = 1\}$ .

Vérifions que  $M(\cdot)$  est une norme :

On a d'abord,  $M(f) \geq 0$ , et  $M(f) = 0$  si et seulement si pour tout  $x \in E, \|x\|_E = 1, \|f(x)\|_F = 0$ , donc  $f(x) = 0$  pour  $x \in \{x \in E; \|x\|_E = 1\}$ , mais  $f$  est linéaire, donc  $f(x) = 0$  pour tout  $x \in E$ .

Il est évident qu'on a  $M(\lambda f) = |\lambda|M(f)$ , donc il nous reste à vérifier l'inégalité triangulaire : Soient  $f_1, f_2 \in \mathcal{L}(E, F), x \in \{\|x\|_E = 1\}$ , on a

$$\|(f_1 + f_2)(x)\|_F = \|f_1(x) + f_2(x)\|_F \leq \|f_1(x)\|_F + \|f_2(x)\|_F \leq M(f_1) + M(f_2),$$

d'où  $M(f_1 + f_2) \leq M(f_1) + M(f_2)$ .

Soit à présent  $x \neq 0$ , on a

$$\left\| \frac{x}{\|x\|_E} \right\| = 1 \implies \left\| f\left(\frac{x}{\|x\|_E}\right) \right\|_F \leq M(f).$$

En utilisant la linéarité de  $f$ , on obtient

$$\left\| \frac{1}{\|x\|_E} f(x) \right\|_F \leq M(f) \implies \|f(x)\|_F \leq M(f) \|x\|_E.$$

D'autre part si pour tout  $x \in E$ , on a  $\|f(x)\|_F \leq C \|x\|_E$ , on aura pour tout  $x \neq 0$ ,

$$\left\| f\left(\frac{x}{\|x\|_E}\right) \right\|_F = \frac{1}{\|x\|_E} \|f(x)\|_F \leq C,$$

puis que  $\left\| \frac{x}{\|x\|_E} \right\| = 1$ , il s'ensuit que  $M(f) \leq C$ .

Finalement, posons

$$M = \sup_{\{x \in E; \|x\|_E \leq 1\}} \|f(x)\|_F,$$

ce sup est atteint en un point  $y \in E$ ,  $\|y\|_E \leq 1$ , i. e.  $M = \|f(y)\|_F$ , il est évident que  $y \neq 0$ , donc

$$\frac{M}{\|y\|_E} = \left\| f\left(\frac{y}{\|y\|_E}\right) \right\|_F \leq M(f),$$

donc  $M \leq M(f) \|y\|_E \leq M(f)$ , et l'inégalité inverse est évidente car le sup est pris sur un domaine plus petit.

**Définition 1.2.1.** *Le nombre  $M(f)$  défini par le théorème 1.2.2 s'appelle la norme de l'application linéaire de  $f$  et est noté  $\|f\|$ . Ainsi  $\mathcal{L}(E, F)$  est un espace vectoriel normés.*

### 1.3. Applications multilinéaires

Soient  $E_1, \dots, E_n$  et  $F$  des espaces vectoriels normés de dimension finies, une application

$$f : E_1 \times \dots \times E_n \longrightarrow F$$

est dite multilinéaire (bilinéaire si  $n = 2$ , trilinéaire si  $n = 3$ ) si, pour chaque  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ , et pour tout  $a_i \in E_i (i \neq k)$ , l'application partielle

$$x_k \longrightarrow f(a_1, \dots, a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, \dots, a_n)$$

de  $E_k$  dans  $F$  est linéaire. Autrement dit, lorsqu'on fixe toutes les variables sauf une,  $f$  doit dépendre linéairement de la variable restante. On notera  $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$  l'ensemble des applications  $n$ -linéaires  $E_1 \times \dots \times E_n \longrightarrow F$ .

**Remarque :** Ne pas confondre avec l'espace des applications linéaires qui, lui, est noté  $\mathcal{L}(E_1 \times \dots \times E_n; F)$  comme il convient.

Observons que si  $f$  est multilinéaire, on a

$$f(\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_n x_n) = \lambda_1 \cdots \lambda_n f(x_1, \dots, x_n).$$

Soient  $E, F, G$  trois espaces vectoriels normés de dimension finies, nous allons définir une application

$$\Phi : \mathcal{L}(E, F; G) \longrightarrow \mathcal{L}(E; \mathcal{L}(f, G))$$

comme suit : Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F; G)$ ,  $f(x, y)$  est une fonction de deux variables  $x \in E$  et  $y \in F$ , si on fixe  $x$ , l'application  $y \rightarrow f(x, y)$  est une application linéaire de  $F$  dans

$G$ , qu'on va noter  $f_x$  ( application partielle). i.e.  $\Phi(f)(x) = f_x$  On peut définir en sens inverse une application

$$\Psi : \mathcal{L}(E; \mathcal{L}(F; ; G)) \longrightarrow \mathcal{L}(E, F; G).$$

Pour cela, partons d'une application linéaire  $g \in \mathcal{L}(E; \mathcal{L}(F; G))$ . Pour  $x \in E$ ,  $g(x)$  est une application linéaire  $F \rightarrow G$ ; donc pour  $x \in E, y \in F, g(x)(y)$  est une application bilinéaire

$$g(\cdot)(\cdot) : E \times F \longrightarrow G.$$

Ainsi  $\mathcal{L}(E, F; G)$  et  $\mathcal{L}(E; \mathcal{L}(F; g))$  se retrouvent canoniquement isomorphes via  $\Phi$  en tant qu'espaces vectoriels. Comme  $\mathcal{L}(E; \mathcal{L}(F; g))$  est un espace vectoriel normé, il en résulte le

**Théorème 1.3.1.** *L'espace  $\mathcal{L}(E, F; G)$  est un espace vectoriel normé muni de la norme induite par cet isomorphisme. Celle-ci est définie, pour toute  $f \in \mathcal{L}(E, F; G)$ , par*

$$\|f\| = \sup_{\|x\|=\|y\|=1} \|f(x, y)\| = \sup_{x \neq 0, y \neq 0} \frac{\|f(x, y)\|}{\|x\|\|y\|}.$$

En outre on a, pour tout  $f \in \mathcal{L}(E, F; G)$ , tout  $x \in E, y \in F$ ,

$$\|f(x, y)\| \leq \|f\|\|x\|\|y\|.$$

**Démonstration :** Pour tout  $f \in \mathcal{L}(E, F; G)$ , on pose  $\|f\| = \|\Phi(f)\|$ , Cette norme étant prise dans  $\mathcal{L}(E; \mathcal{L}(F; G))$ . Il ne reste qu'à expliciter

$$\begin{aligned} \|\Phi(f)\| &= \sup_{\|x\|=1} \|\Phi(f)(x)\| \\ &= \sup_{\|x\|=1} (\sup_{\|y\|=1} \|f(x, y)\|) \\ &= \sup_{\|x\|=\|y\|=1} \|f(x, y)\|, \end{aligned}$$

Ceci prouve la première égalité de l'énoncé, la deuxième égalité est immédiate par bilinéarité de  $f$ . L'inégalité finale sort directement de cette dernière formulation.

Bien entendu tout ceci se généralise, pour tout entier  $n \geq 3$ , aux applications multilinéaires.

**Théorème 1.3.2.** *Soient  $E_1, E_2, \dots, E_n, F$  des espaces vectoriel normés de dimension finies. L'espace  $\mathcal{L}(E_1, E_2, \dots, E_n; F)$  des applications multilinéaires est un espace vectoriel normé muni de la norme définie, pour toute  $f \in \mathcal{L}(E_1, E_2, \dots, E_n; F)$ , par*

$$\|f\| = \sup_{\|x_1\|=\dots=\|x_n\|=1} \|f(x_1, \dots, x_n)\| = \sup_{x_1 \neq 0, \dots, x_n \neq 0} \frac{\|f(x_1, \dots, x_n)\|}{\|x_1\| \cdots \|x_n\|}.$$

En outre on a, pour tout  $f \in \mathcal{L}(E_1, E_2, \dots, E_n; F)$ , tout  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$ ,

$$\|f(x_1, x_2, \dots, x_n)\| \leq \|f\|\|x_1\|\|x_2\| \cdots \|x_n\|.$$

Il suffit de procéder par récurrence, en montrant que  $\mathcal{L}(E_1, E_2, \dots, E_n; F)$  est isomorphe à  $\mathcal{L}(E_1; \mathcal{L}(E_2; \dots, \mathcal{L}(E_n; F) \cdots))$

En utilisant cet isomorphisme, on a que toute application multilinéaires sont continues de  $E_1 \times \cdots \times E_n$  dans  $F$ .

## CHAPITRE 2

### Applications différentiables

#### 2.1. Dérivées partielles de fonction de plusieurs variables

Soit  $I$  un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$ ,  $p \geq 1$ ,

$$f : I \rightarrow \mathbb{R}^p; \quad t \mapsto f(t) = (f_1(t), \dots, f_p(t))$$

une fonction à valeur vectorielle et  $a \in I$ . On dit que  $f$  est dérivable en  $a$  si

$$\lim_{t \rightarrow a} \frac{f(t) - f(a)}{t - a}$$

existe (un vecteur de  $\mathbb{R}^p$ ). Lorsqu'elle existe, cette limite est noté  $f'(a) \in \mathbb{R}^p$ . Si  $f$  est dérivable en  $a$ ,  $f$  est continue en  $a$ . On a l'expression suivante

$$f(a + h) = f(a) + h f'(a) + o(h).$$

On peut dire, au voisinage de  $a$ ,  $f$  est approchée par la fonction affine  $f(a) + h f'(a)$  : On a linéarisé la fonction  $f$ . Il est naturel de généraliser cette étude sur une fonction de plusieurs variables

$$f : U \rightarrow \mathbb{R}^p; \quad x \mapsto f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_p(x_1, \dots, x_n))$$

où  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 1, p \geq 1$ . La dérivée partielle  $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ ,  $j = 1, \dots, n$  pour  $a \in U$  est, par définition, la dérivée de l'application partielle

$$t \mapsto f(a_1, \dots, a_{j-1}, a_j + t, a_{j+1}, \dots, a_n)$$

en  $t = 0$ . Il existe des fonctions telles que toutes les dérivées partielles existent en un point sans que les fonctions ne soient pas continues en ce point (voir exercices de TD).

Sous réserve d'existence, on peut définir par récurrence sur  $k \in \mathbb{N}$  une dérivée partielle d'ordre  $k$  par la relation

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \cdots \partial x_{i_1}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} \left( \frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_{k-1}} \cdots \partial x_{i_1}} \right).$$

Une application  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  est dite de classe  $C^k$  si toutes ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre  $k$  existent et sont continues sur  $U$ .  $C^k(U, \mathbb{R}^p)$  désigne l'ensemble de fonctions de classe  $C^k$ .

#### **Théorème 2.1.1. (Théorème de Schwarz)**

Soit une fonction  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ , où  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ , telle que  $f$  admette des dérivées partielles  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  et  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  sur  $U$ , continue en un point  $a \in U$ . Alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a).$$

Rappelons le Théorème des accroissements finies : Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une application continue sur  $[a, b]$  et dérivable sur  $]a, b[$ . Alors

$$\exists c \in ]a, b[, \quad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Démonstration : Soient  $a = (x_0, y_0) \in U, h >, k >$  tels que  $[x_0, x_0 + h] \times [y_0, y_0 + k] \subset U$ . On pose

$$\delta(h, k) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0)$$

and

$$\varphi(x) = f(x, y_0 + k) - f(x, y_0),$$

alors

$$\delta(h, k) = \varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0).$$

La fonction est dérivable sur  $[x_0, x_0 + h]$ , le théorème des accroissements finies assure l'existence  $\theta_1 \in ]0, 1[$  tel que

$$\begin{aligned} \delta(h, k) &= \varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0) = h \varphi'(x_0 + \theta_1 h) \\ &= h \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta_1 h, y_0) \right). \end{aligned}$$

Maintenant l'application

$$y \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta_1 h, y)$$

étant dérivable sur  $[y_0, y_0 + k]$ , une nouvelle application du théorème des accroissements finies assure l'existence  $\theta_2 \in ]0, 1[$  tel que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta_1 h, y_0) = k \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \theta_2 k),$$

d'où

$$\delta(h, k) = h k \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \theta_2 k).$$

En travaillant à partir de la fonction

$$\psi(y) = f(x_0 + h, y) - f(x_0, y), \quad \delta(h, k) = \psi(y_0 + k) - \psi(y_0).$$

On montrerait de même l'existence de  $\theta_3, \theta_4 \in ]0, 1[$  tels que

$$\delta(h, k) = k h \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + \theta_3 h, y_0 + \theta_4 k).$$

On a ainsi obtenu

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \theta_2 k) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + \theta_3 h, y_0 + \theta_4 k).$$

En faisant tendre  $h, k$  vers 0, la continuité de  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  et  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  en  $a = (x_0, y_0)$  implique

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0).$$

**Remarque :** Sans la condition de continuité en  $a$  des dérivées partielles d'ordre 2, ce résultat est faux.

**Corollaire 2.1.1.** *Soit  $f \in C^k(U, \mathbb{R}^p)$ , alors les dérivées partielles de  $f$  jusqu'à l'ordre  $k$  ne dépendent pas de l'ordre de dérivation. On peut donc les écrire toutes sous la forme*

$$\frac{\partial^j f}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2} \cdots \partial x_n^{i_n}} \quad \text{où } i_1 + i_2 + \cdots + i_n = j \leq k.$$

## 2.2. La différentielle

Nous allons généraliser les notions de différentiables pour des applications entre deux espaces vectoriels normés. Pour des espaces vectoriels distincts  $E, F, G, \dots$  munis de normes  $\|\cdot\|_E, \|\cdot\|_F, \|\cdot\|_G, \dots$ , nous omettrons les suffixes  $E, F, G, \dots$  et écrirons le même symbole  $\|\cdot\|$  sauf quand il y a risque de confusion.

**Définition 2.2.1.** *Soient  $E, F$  deux espaces vectoriels normés (e.v.n.) de dimension finie,  $U$  un ouvert de  $E$ ,  $f : U \rightarrow F$ . On dit que  $f$  est différentiable au point  $a \in U$ , s'il existe une application linéaire  $l \in \mathcal{L}(E, F)$  telle que*

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - l(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

$l$  s'appelle la différentielle de  $f$  au point  $a$  et se note  $df(a)$  (nous utilisons aussi les notations  $f'(a), Df(a)$ ).

Une telle  $l \in \mathcal{L}(E, F)$ , si elle existe, est unique. En effet si  $k \in \mathcal{L}(E, F)$  un autre élément vérifiant la définition 2.2.1, on aurait, pour tout  $t > 0$  et tout  $h \in E, h \neq 0$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\|l(h) - k(h)\|}{\|h\|} &= \frac{t\|l(h) - k(h)\|}{t\|h\|} = \frac{\|tl(h) - tk(h)\|}{\|th\|} \leq \frac{\|l(th) - k(th)\|}{\|th\|} \\ &\leq \frac{\|f(a+th) - f(a) - l(th)\|}{\|th\|} + \frac{\|f(a+th) - f(a) - k(th)\|}{\|th\|} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

Donc  $\|l(h) - k(h)\| = 0$ , et  $l(h) = k(h)$  pour tout  $h \in E$ , d'où  $l = k$ .

Si  $f$  est différentiable en  $a$ ,  $f$  est continue en  $a$ , et

$$\frac{\|f(a+h) - f(a)\|}{\|h\|}$$

est bornée au voisinage de  $h = 0$ .

En effet, on a  $\|f(a+h) - f(a) - l(h)\| \rightarrow 0$  lorsque  $h \rightarrow 0$ , or  $l$  est continue car  $l \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $\dim E$  et  $\dim F < \infty$ , donc  $l(h) \rightarrow 0$  lorsque  $h \rightarrow 0$ . Il s'en suit que  $f(a+h) - f(a) \rightarrow 0$  lorsque  $h \rightarrow 0$ , d'où la continuité de  $f$  en  $a$ .

**Définition 2.2.2.** *On dit que  $f : U \rightarrow F$  est différentiable dans  $U$  si  $f$  est différentiable en tout point de  $U$ . Si de plus, l'application*

$$df : U \rightarrow \mathcal{L}(E, F), x \rightarrow df(x)$$

*est continue pour la norme de  $\mathcal{L}(E, F)$  définie dans la section 1.2, on dit que  $f$  est continûment différentiable dans  $U$  ou de classe  $C^1(U)$ .*

**Théorème 2.2.1.** *La différentiabilité est une notion topologique, i.e. on ne change pas l'existence ni la valeur de la différentielle  $df(a)$  en remplaçant les normes de  $E$  et de  $F$  par des normes équivalentes.*

**Démonstration :** Supposons qu'il existe  $l \in \mathcal{L}(E, F)$  telle que

$$\lim_{\|h\|_E \rightarrow 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - l(h)\|_F}{\|h\|_E} = 0,$$

soit  $\|\cdot\|'_E, \|\cdot\|'_F$  d'autres normes sur  $E$  et  $F$ . Puisque les normes  $\|\cdot\|, \|\cdot\|'$  sont équivalentes, il existe donc  $c, d > 0$  tels que  $\|x\|'_E \geq c\|x\|_E, \|y\|'_F \leq d\|y\|_F$  pour tout  $x \in E, y \in F$ . Alors

$$\frac{\|f(a+h) - f(a) - l(h)\|'_F}{\|h\|'_E} \leq \frac{d}{c} \frac{\|f(a+h) - f(a) - l(h)\|_F}{\|h\|_E} \longrightarrow 0,$$

lorsque  $h \rightarrow 0$ , d'où le théorème.

**Définition 2.2.3.** *Soit  $v$  un vecteur non nul de  $E$ . On dit que  $f$  est différentiable en  $a$  suivant le vecteur  $v$  (ou dans la direction de  $v$ ), si la limite*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}$$

*existe. On la note alors  $\frac{\partial f}{\partial v}$ .*

Si  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , les dérivées de  $f$  suivant  $e_1, \dots, e_n$  (la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ ) sont, quand elles existent, appelées dérivées partielles de  $f$  et notées  $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ .

**Proposition 2.2.1.** *Si  $f$  est différentiable en  $a$  et si  $v$  est un vecteur non nul de  $E$ , alors  $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$  existe et on a  $\frac{\partial f}{\partial v}(a) = df(a)(v)$ .*

En effet, on a

$$\left\| \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} - df(a)(v) \right\|_F = \|v\|_E \frac{\|f(a+tv) - f(a) - df(a)(tv)\|_F}{|t|\|v\|_E} \longrightarrow 0,$$

lorsque  $t \rightarrow 0$ .

Mais l'inverse de cette proposition est fautive, il est possible que  $f$  soit différentiable en  $a$  suivant tout vecteur non nul de  $E$  sans que  $f$  soit différentiable en  $a$ .

### 2.3. Différentielles d'applications particulières

**Proposition 2.3.1.** *Soit  $u : E \rightarrow F$  une application linéaire,  $b$  un point de  $F$ , et  $f : E \rightarrow F$  l'application affine définie par  $f(x) = u(x) + b$ . Alors  $f$  est différentiable en tout point  $a \in E$  et  $df(a) = u$ .*

La preuve est immédiate, puisque  $f(a+h) - f(a) - u(h) = 0$  pour tout  $a, h \in E$ .

**Proposition 2.3.2.** *Soit  $E$  le produit de  $n$  espaces vectoriels normés  $E_1, \dots, E_n$ , soit  $f : E_1 \times \dots \times E_n \longrightarrow F$  une application multilinéaire (i. e.  $f(x_1, \dots, x_n)$  est linéaire par rapport à chaque variable  $x_j \in E_j$ ). Alors  $f$  est différentiable en tout point  $a = (a_1, \dots, a_n) \in E$  et la différentielle de  $f$  en  $a$  vérifie*

$$df(a)(h) = \sum_{j=1}^n f(a_1, \dots, h_j, \dots, a_n),$$

pour tout  $h = (h_1, \dots, h_n) \in E$

Il est facile de voir que

$$\begin{aligned} & f(a_1 + h_1, \dots, a_n + h_n) - f(a_1, \dots, a_n) \\ & - \sum_{j=1}^n f(a_1, \dots, h_j, \dots, a_n) = \|h\|o(\|h\|). \end{aligned}$$

Par exemple pour  $n = 2$ , on a

$$f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) = f(a_1, a_2) + f(h_1, a_2) + f(a_1, h_2) + f(h_1, h_2),$$

et

$$\|f(h_1, h_2)\| \leq \|f\| \|h_1\| \|h_2\| \leq \|f\| \|h\|^2.$$

Pour calculer la différentielle d'une application, on a les règles de calcul suivants :

**Théorème 2.3.1.** *Soient  $E, F$  deux e.v.n. de dimension finie,  $U$  un ouvert de  $E$ ,  $f, g$  des applications de  $U$  dans  $F$  différentiables en  $a \in U$ . Alors*

- (i)  $f + g$  est différentiable en  $a$  et  $d(f + g)(a) = df(a) + dg(a)$  ;
- (ii) Pour tout réel  $\alpha$ ,  $\alpha f$  est différentiable en  $a$  et  $d(\alpha f)(a) = \alpha df(a)$  ;
- (iii) si  $f$  est constante sur une boule ouverte de centre  $a$ ,  $df(a) = 0$ .
- (iv) si  $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}$  est une fonction différentiable en  $a$ , alors  $\varphi f$  est aussi différentiable en  $a$  et  $d(\varphi f)(a) = d\varphi(a)f(a) + \varphi(a)df(a)$ , i.e. pour tout  $h \in E$ , on a

$$d(\varphi f)(a)(h) = d\varphi(a)(h)f(a) + \varphi(a)df(a)(h),$$

ce qui a un sens car  $d\varphi(a)(h)$  et  $\varphi(a)$  sont des réels.

**Démonstration** : (i), (ii) et (iii) sont faciles. Démontrons donc (iv) en utilisant le fait que  $d\varphi(a)(h)$  et  $\varphi(a)$  sont des réels pour tout  $h \in E$ , on a

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\|h\|} \|\varphi(a+h)f(a+h) - \varphi(a)f(a) - d\varphi(a)(h)f(a) - \varphi(a)df(a)(h)\| \\
= & \frac{1}{\|h\|} \|(\varphi(a+h) - \varphi(a) - d\varphi(a)(h))f(a) \\
+ & \varphi(a+h)f(a+h) - \varphi(a+h)(h)f(a) - \varphi(a)df(a)(h)\| \\
= & \frac{1}{\|h\|} \|(\varphi(a+h) - \varphi(a) - d\varphi(a)(h))f(a) \\
+ & \varphi(a)(f(a+h) - f(a) - df(a)(h)) + (\varphi(a+h) - \varphi(a))(f(a+h) - f(a))\| \\
\leq & \frac{1}{\|h\|} \|\varphi(a+h) - \varphi(a) - d\varphi(a)(h)\| \|f(a)\| \\
+ & \frac{1}{\|h\|} \|f(a+h) - f(a) - df(a)(h)\| \|\varphi(a)\| \\
+ & \frac{1}{\|h\|} \|\varphi(a+h) - \varphi(a)\| \|f(a+h) - f(a)\|.
\end{aligned}$$

Les deux premiers termes tend vers 0 lorsque  $h \rightarrow 0$  car  $\varphi$  et  $f$  sont différentiables en  $a$ . Par ailleurs on a

$$\begin{aligned}
\|f(a+h) - f(a)\| & \leq \|f(a+h) - f(a) - df(a)(h)\| + \|df(a)(h)\| \\
& \leq (\|df(a)\| + o(\|h\|))\|h\|,
\end{aligned}$$

donc

$$\frac{1}{\|h\|} \|\varphi(a+h) - \varphi(a)\| \|f(a+h) - f(a)\| \leq C \|\varphi(a+h) - \varphi(a)\| \rightarrow 0,$$

lorsque  $\|h\| \rightarrow 0$ . Q.E.D.

**Théorème 2.3.2.** Soient  $E, F, G$  trois e.v.n.,  $U, V$  des ouverts de  $E$  et  $F$  respectivement,  $f : U \rightarrow F$ ,  $g : V \rightarrow G$ ,  $a \in U$  tel que  $f(a) = b \in V$ . Alors si  $f$  est différentiable en  $a$  et  $g$  est différentiable en  $b$ ,  $g \circ f$  est différentiable en  $a$  et on a

$$d(g \circ f)(a) = dg(f(a)) \circ df(a).$$

**Démonstration** : Il s'agit de montrer que

$$g(f(a+h)) - g(f(a)) - (dg(f(a)) \circ df(a))(h) = \psi(h)$$

avec  $\|\psi(h)\|/\|h\| \rightarrow 0$  lorsque  $\|h\| \rightarrow 0$ . On a par hypothèse,

$$\begin{aligned}
f(a+h) - f(a) - df(a)(h) & = \|h\|o(\|h\|), \\
g(b+k) - g(b) - dg(b)(k) & = \|k\|o(\|k\|),
\end{aligned}$$

où  $o(\|h\|)$  désigne un vecteur de  $E$  (ou de  $F$ , ou de  $G$ ), et  $\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \|o(\|h\|)\| = 0$ . Donc pour  $k = f(a+h) - f(a) \in F$ , on a

$$\begin{aligned}
& g(f(a+h)) - g(f(a)) - dg(f(a))(f(a+h) - f(a)) \\
= & \|f(a+h) - f(a)\|o(\|f(a+h) - f(a)\|),
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} & g(f(a+h)) - g(f(a)) - dg(f(a))(df(a)(h) + \|h\|o(\|h\|)) \\ &= \|f(a+h) - f(a)\|o(\|f(a+h) - f(a)\|), \end{aligned}$$

comme  $dg(f(a))$  est linéaire, on obtient

$$\begin{aligned} & g(f(a+h)) - g(f(a)) - dg(f(a))(df(a)(h)) \\ &= \|f(a+h) - f(a)\|o(\|f(a+h) - f(a)\|) + dg(f(a))(\|h\|o(\|h\|)), \end{aligned}$$

comme  $\frac{\|f(a+h)-f(a)\|}{\|h\|}$  est bornée au voisinage de  $h = 0$ , et

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \|o(\|f(a+h) - f(a)\|)\| = 0,$$

on a donc démontré

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\| \|f(a+h) - f(a)\|o(\|f(a+h) - f(a)\|) + dg(f(a))(\|h\|o(\|h\|)) \|}{\|h\|} = 0.$$

On a donc démontré le théorème.

## 2.4. Espaces produits

**Théorème 2.4.1.** Soient  $E, G_1, G_2, \dots, G_n$  des e.v.n.  $U$  un ouvert de  $E$ ,  $f = (f_1, \dots, f_n)$  une application de  $U$  dans  $G_1 \times \dots \times G_n$ . Pour que  $f$  soit différentiable au point  $a \in U$ , il faut et il suffit que chacune des  $f_j$  le soit et on a alors

$$df(a) = (df_1(a), \dots, df_n(a)).$$

**Démonstration :** Pour l'espace vectoriel normé  $G = G_1 \times \dots \times G_n$ , on choisit le norme

$$\|(g_1, \dots, g_n)\|_G = \sum_{j=1}^n \|g_j\|_{G_j}.$$

Si  $l = (l_1, \dots, l_n)$  et  $l_j : E \rightarrow G_j, j = 1, \dots, n$  des applications linéaires, on a

$$\frac{\|f(a+h) - f(a) - l(h)\|_G}{\|h\|_E} = \sum_{j=1}^n \frac{\|f_j(a+h) - f_j(a) - l_j(h)\|_{G_j}}{\|h\|_E},$$

le membre de gauche  $\rightarrow 0$  (lorsque  $h \rightarrow 0$ ) si et seulement si chaque terme du membre de droite  $\rightarrow 0$  (lorsque  $h \rightarrow 0$ ). Le résultat s'en suit. Q. E. D.

Un cas spécial de ce théorème est :  $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$  est une base de l'e.v.n.  $G$  et  $G_j$  est l'e.v.n. de dimension 1 engendré par  $Y_j, j = 1, \dots, n$ , dans ce cas-là, les  $f_1, \dots, f_n$  sont des composantes de  $f$  dans la base  $Y$ .

Si l'espace de départ est un espace produit, la situation sera plus complexe. Soit donc  $E = E_1 \times \dots \times E_n, E_1, \dots, E_n, F$  sont des e.v.n, on choisit le norme de  $E$  comme

$\|(x_1, \dots, x_n)\|_E = \sum_{j=1}^n \|x_j\|_{E_j}$ . Pour  $U$  un ouvert de  $E$ ,  $f : U \rightarrow F$ ,  $a = (a_1, \dots, a_n) \in U$ , supposons que  $f$  soit différentiable en  $a$ , on peut alors écrire

$$\begin{aligned} & df(a)(h_1, \dots, h_n) \\ &= df(a)((h_1, 0, \dots, 0) + (0, h_2, 0, \dots, 0) + (0, \dots, 0, h_n)) \\ &= df(a)(h_1, 0, \dots, 0) + df(a)(0, h_2, 0, \dots, 0) + df(a)(0, \dots, 0, h_n). \end{aligned}$$

Pour  $j = 1, \dots, n$ , on définit  $d_j f(a)(h_j) = df(a)(0, \dots, 0, h_j, 0, \dots, 0)$ , ce sont des applications linéaires de  $E_j$  dans  $F$ . Nous avons ainsi démontré le théorème suivant :

**Théorème 2.4.2.** *Avec les notations ci-dessus, si  $f$  est différentiable en point  $a$ , alors pour tout  $j = 1, \dots, n$ , l'application partielle*

$$x_j \rightarrow f(a_1, \dots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \dots, a_n)$$

*de  $E_j$  dans  $F$  est différentiable en  $a_j$  et sa différentielle vaut  $d_j f(a)$ . De plus on a la formule suivante*

$$df(a)(h_1, \dots, h_n) = \sum_{j=1}^n d_j f(a)(h_j).$$

### Le cas de $\mathbb{R}^n$

Soit  $I$  un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , supposons que  $f$  soit différentiable au point  $a \in I$ , on a donc par définition  $df(a)(h) = ch$  pour tout  $h \in \mathbb{R}$ . Calculons  $c$ , on a

$$\frac{|f(a+h) - f(a) - ch|}{|h|} \rightarrow 0,$$

donc  $c = f'(a)$ , en d'autres termes  $df(a)(h) = f'(a)h$ .

Soit maintenant  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a = (a_1, \dots, a_n) \in U$ , et supposons que  $f$  soit différentiable au point  $a$ . Soient  $I_1, \dots, I_n$  des intervalles ouverts tels que  $a \in I_1 \times I_n \subset U$ . On a d'après la définition donnée dans la preuve du théorème précédent que  $df(a)(h_1, \dots, h_n) = \sum_{j=1}^n d_j f(a)(h_j)$  pour tout  $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ .

Calculons maintenant  $d_j f(a)$ ,  $j = 1, \dots, n$ . On a d'abord

$$\begin{aligned} & \frac{|f(a_1, \dots, a_{j-1}, a_j + h_j, a_{j+1}, \dots, a_n) - f(a) - d_j f(a)(h_j)|}{|h_j|} \\ &= \frac{|f(a_1, \dots, a_{j-1}, a_j + h_j, a_{j+1}, \dots, a_n) - f(a) - df(a)(0, \dots, 0, h_j, 0, \dots, 0)|}{\|(0, \dots, 0, h_j, 0, \dots, 0)\|} \end{aligned}$$

tend vers 0 lorsque  $h_j \rightarrow 0$ , donc  $d_j f(a)$  est la différentielle de l'application

$$x \rightarrow f(a_1, \dots, a_{j-1}, x, a_{j+1}, \dots, a_n)$$

de  $I_j$  dans  $\mathbb{R}$ . On a alors  $d_j f(a)(h_j) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)h_j$  la  $j^e$  dérivée partielle de  $f$ , par conséquent

$$df(a)(h_1, \dots, h_n) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)h_j = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right) \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}.$$

**Définition 2.4.1. (Gradient)**

Soient  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  une application différentiable en  $a \in U$ . Alors  $df(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = (\mathbb{R}^n)^*$  et il existe un unique vecteur  $v \in \mathbb{R}^n$  tel que

$$df(a)(h) = (v | h) \quad \forall h \in \mathbb{R}^n$$

où  $(\cdot | \cdot)$  est le produit scalaire dans  $\mathbb{R}^n$ . Le vecteur  $v$  s'appelle le **gradient** de  $f$  en  $a$  et est noté  $\text{grad}_a f$ .

Soit  $(dx_j, j = 1, \dots, n)$  la base duale dans  $(\mathbb{R}^n)^*$  de la base canonique  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $\mathbb{R}^n$ , i. e.  $dx_j \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), j = 1, \dots, n$  tels que

$$dx_j(e_k) = \delta_{j,k}, \quad j, k = 1, \dots, n.$$

On a alors

$$df(a) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) dx_j \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}),$$

et

$$\text{grad}_a f = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) e_j$$

Enfin si  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n, f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  différentiable en  $a$ , alors d'après le théorème 2.4.1 on a

$$df(a)(h_1, \dots, h_n) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ h_n \end{pmatrix}.$$

La matrice

$$J(f)(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

s'appelle la **matrice jacobienne** de  $f$  en  $a$ .

Le théorème 2.3.2 se dit en termes matriciels

**Théorème 2.3.2'** Soit  $U \subset \mathbb{R}^n, f : U \rightarrow \mathbb{R}^m, V \subset \mathbb{R}^m$  et  $g : V \rightarrow \mathbb{R}^p$ . Soit  $a \in U$  tel que  $f(a) = b \in V$ . Si  $f$  est différentiable en  $a, g$  est différentiable en  $b$ , alors  $g \circ f$  est différentiable en  $a$  et sa matrice jacobienne est  $A \times B$  où  $A$  est la matrice jacobienne de  $g$  en  $b$  et  $B$  est celle de  $f$  en  $a$ .

**Définition 2.4.2.** Soit  $U \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  (même  $n$ ), différentiable en  $a \in U$ , alors le déterminant de la matrice de  $f$  en  $a$  s'appelle le **jacobien** de  $f$  en  $a$  et se note

$$|J(f)(a)| = \frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(a).$$

Si  $E, F$  sont deux e.v.n. de dimension finies quelconques,  $U$  un ouvert de  $E$ ,  $f : U \rightarrow F$  une application différentiable, en choisissant une base de  $E$  et une base de  $F$ , on peut aussi écrire la matrice jacobienne de  $f$ .

## 2.5. Quelques applications

Nous donnons à ici quelques applications immédiates de la différentielle d'une application entre deux espaces vectoriels normés.

**Théorème 2.5.1.** *Soit  $E$  un e.v.n. de dimension finie,  $U$  un ouvert de  $E$ ,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  différentiable. Si  $f$  admet un maximum local en  $a \in U$ , alors  $df(a) = 0$ .*

**Démonstration :** Soit  $\xi \in E, \xi \neq 0$ , posons  $\gamma(t) = f(a + t\xi)$  pour  $t \in \mathbb{R}$ . Par hypothèse,  $\gamma$  admet un maximum en  $t = 0$ , donc  $\gamma'(0) = 0$ , mais

$$\gamma'(0) = \frac{\partial f}{\partial \xi}(a) = df(a)(\xi),$$

ceci étant vrai pour tout  $\xi \in E$ , on a donc démontré  $df(a) = 0$ .

La réciproque de ce théorème est fautive. un point  $a \in U$  tel que  $df(a) = 0$  s'appelle un **point critique** de  $f$ . Donc tout point où  $f$  admet un maximum local ou un minimum local est un point critique de  $f$ .

### Le plan tangent

On donne d'abord quelques notations. Soient  $E, F$  deux e.v.n. de dimension finie,  $U$  un ouvert de  $E$ ,  $f : U \rightarrow F$ . Le **graphe** de  $f$  est l'ensemble  $S = \{(x, f(x)); x \in U\} \subset U \times F$ .  $S$  est peut être considéré comme une “**surface**” au dessus de  $U$ . Soit  $a \in U$  tel que  $f$  est différentiable en  $a$ . Alors le plan dans  $E \times F$  de l'équation  $y - f(a) = df(a)(x - a)$  s'appelle le **plan tangent** à  $S$  au point  $(a, f(a))$ , se note  $T_a S = \{(x, y); y - f(a) = df(a)(x - a), x \in E, y \in F\}$ .

En particulier, si  $E = \mathbb{R}$  et  $U$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ , la droite tangente à la courbe  $\{(t, f(t)); t \in U\}$  au point  $(a, f(a))$  est la droite de l'équation

$$y - f(a) = df(a)(t - a) = (t - a)f'(a), t \in \mathbb{R}.$$

C'est donc la droite passant par  $(a, f(a))$  de pente  $f'(a)$ .

**Théorème 2.5.2.** *Le plan tangent  $T_a S$  de surface  $S$  définie par  $f$  est la réunion de toutes les droites dans  $E \times F$  passant par le point  $(a, f(a))$  qui sont tangentes en  $(a, f(a))$  aux courbes sur  $S$  passant par  $(a, f(a))$ .*

**Démonstration :** (i) Soit  $t \rightarrow \Gamma(t) = (\gamma(t), f(\gamma(t)))$  une courbe sur  $S$  avec  $\gamma(0) = a$ , différentiable en  $t = 0$ , sa différentielle en  $t = 0$  est

$$d\Gamma(0)(1) = \Gamma'(0) = (\gamma'(0), df(a) \circ \gamma'(0)),$$

alors la droite tangente de cette courbe passant par  $(a, f(a))$  est celle de l'équation suivante

$$(x, y) - (a, f(a)) = \Gamma'(0)t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

il en déduit que  $y - f(a) = df(a)(x - a)$ , donc cette droite est contenue dans  $T_a S$ .

(ii) On a d'abord toutes les droites dans  $E \times F$  passant par  $(a, f(a))$  sont celles des équations suivantes

$$(x, y) - (a, f(a)) = (\xi, \eta)t, \quad t \in \mathbb{R},$$

où  $(\xi, \eta) \in E \times F, \xi \neq 0$ . Soit maintenant cette droite est contenue dans  $T_a S$ , donc  $\eta = df(a)(x-a)/t$ . On considère la courbe  $t \rightarrow (\xi t + a, f(\xi t + a)) \in S; t \in \mathbb{R}$ . Le vecteur tangent de cette courbe en  $(a, f(a))$  est  $(\xi, df(a)(x-a))$ , donc la droite tangente de cette courbe est bien la droite précédente. On a donc démontré le théorème.

**Exemple 1.** Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  différentiable sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ . Le graphe de  $f$  est une courbe dans  $\mathbb{R}^2$  définie par  $\{(t, f(t)); t \in \mathbb{R}\}$ . Le plan tangent à cette courbe au point  $(a, f(a))$  est la droite tangente définie par l'équation  $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ .

**Exemple 2.** Soit  $u : E \rightarrow F$  une application linéaire,  $b$  un point de  $F$ ,  $f : E \rightarrow F$  l'application affine définie par  $f(x) = u(x) + b$ . Le graphe de  $f$  est un plan (dit aussi surface) dans  $E \times F$  défini par  $\{(x, u(x)+b); x \in E\}$ . Comme  $df(a) = u$  pour tout  $a \in E$ , le plan tangent à cette surface au point  $(a, f(a))$  a pour équation  $y = u(x-a) + f(a) = u(x) + b$ , c'est-à-dire le plan  $\{(x, u(x) + b); x \in E\}$ . Donc pour une application affine, le plan tangent du graphe est coïncidé avec ce graphe.

**Exemple 3.** Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f_1(x) = (x_1^2 - x_2^2)/2$ ,  $f_2(x) = x_1 x_2$ ,  $f = (f_1, f_2)$ . Le graphe de  $f$  est une surface dans  $\mathbb{R}^4$ . Le plan tangent à cette surface au point  $(a, f(a))$  a pour équation  $y = df(a)(x-a) + f(a)$ . Au point  $a = (1, 2)$  la matrice jacobienne de  $f$  s'écrit en

$$\begin{pmatrix} x_1 & -x_2 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix}_{(1,2)} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

et l'équation du plan tangent s'écrit alors

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3/2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

i.e.

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - 2x_2 + 3/2 \\ y_2 = 2x_1 + x_2 - 2 \end{cases}.$$



## Théorème des accroissements finis

### 3.1. Applications de la variable réelle

On rappelle d'abord le théorème des accroissements finis classique.

**Théorème 3.1.1.** *Soit  $[a, b]$  un intervalle fermé de  $\mathbb{R}$ . Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue sur  $[a, b]$  et dérivable en tout point de  $]a, b[$ . Alors il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$ .*

En terme géométriques, cela signifie qu'il existe un point  $(c, f(c))$  du graphe de  $f$  où la tangente est parallèle au segment joignant les extrémités  $(a, f(a))$  et  $(b, f(b))$  de ce graphe.

Si maintenant, sous les mêmes hypothèses,  $f$  est une fonction à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , i.e.  $f = (f_1, \dots, f_n)$  avec  $f_j$  des fonctions de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$ . En appliquant le théorème des accroissements finis à chacune des composantes  $f_j$  de  $f$ , on sait qu'il existe, pour tout  $j = 1, \dots, n$ , un nombre  $c_j \in ]a, b[$  tel que  $f_j(b) - f_j(a) = (b - a)f'_j(c_j)$ , mais ce nombre  $c_j$  n'est pas nécessairement le même pour chaque valeur de  $j$ . Pour s'en convaincre, on peut voir l'application  $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $t \rightarrow (\cos t, \sin t)$ , puisque  $f(2\pi) - f(0) = (0, 0) \neq 2\pi(-\sin t_0, \cos t_0)$  pour tout  $t_0 \in ]0, 2\pi[$ . Donc pour les fonctions à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ , il n'existe pas nécessairement de point  $c$  de  $]a, b[$  vérifiant l'égalité vectorielle  $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$ .

Il est cependant très important pour les applications de  $[a, b]$  dans  $F$  un e.v.n, de pouvoir donner une majoration précise et simple de  $\|f(b) - f(a)\|$  connaissant une majoration de  $\|f'(t)\|$  sur  $]a, b[$  où on a noté  $f'(t) = df(t) \cdot 1$ .

**Théorème 3.1.2.** *Soient  $[a, b]$  un intervalle fermé de  $\mathbb{R}$ ,  $F$  un e.v.n. de dimension finie,  $f : [a, b] \rightarrow F$  et  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  deux applications continues sur  $[a, b]$  et différentiables sur  $]a, b[$ . Supposons que  $\|f'(t)\| \leq g'(t)$  pour  $a < t < b$ , alors*

$$\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a).$$

**Démonstration :** Soit  $\varepsilon > 0$ , on considère la fonction réelle de l'intervalle  $[a, b]$ ,

$$\phi_\varepsilon(x) = \|f(x) - f(a)\| - (g(x) - g(a)) - \varepsilon(x - a) - \varepsilon$$

et l'ensemble  $A_\varepsilon = \{x \in [a, b]; \phi_\varepsilon(x) \leq 0\}$ . Comme  $\phi_\varepsilon$  est continue,  $A_\varepsilon$  est fermé dans  $[a, b]$  et contient donc sa borne supérieure  $c$ . On a que  $\phi_\varepsilon(a) = -\varepsilon < 0$ , et que  $\phi_\varepsilon$  est continue, donc  $a < c$ . On veut montrer que  $c = b$ , supposons au contraire que  $a < c < b$ . Comme  $f$  et  $g$  sont différentiables au point  $c$ . On peut donc écrire pour  $h > 0$  assez petit

$$\begin{aligned} f(c + h) - f(c) &= f'(c)h + \varepsilon_1(h)h, \\ g(c + h) - g(c) &= g'(c)h + \varepsilon_2(h)h. \end{aligned}$$

Comme  $\varepsilon_j(h) \rightarrow 0, j = 1, 2$  avec  $h$ , on a pour  $h$  assez petit  $\|\varepsilon_1(h)\| < \varepsilon/2$  et  $|\varepsilon_2(h)| < \varepsilon/2$  et donc

$$\begin{aligned}\|f(c+h) - f(c)\| &\leq \|f'(c)\|h + \varepsilon/2h, \\ g(c+h) - g(c) &\geq g'(c)h - \varepsilon/2h.\end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse  $\|f'(c)\| \leq g'(c)$ , on obtient

$$\|f(c+h) - f(c)\| \leq g(c+h) - g(c) + \varepsilon h.$$

l'autre part,  $c \in A_\varepsilon$ , on a

$$\|f(c) - f(a)\| \leq g(c) - g(a) + \varepsilon(c-a) + \varepsilon,$$

d'où

$$\|f(c+h) - f(a)\| \leq g(c+h) - g(a) + \varepsilon(c+h-a) + \varepsilon,$$

ceci implique que  $c+h \in A_\varepsilon$ , en contradiction avec la définition de  $c$ . Donc  $c = b$ , et

$$\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a) + \varepsilon(b-a) + \varepsilon,$$

ceci étant vrai pour tout  $\varepsilon > 0$ , on conclut

$$\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a).$$

Q.E.D.

**Corollaire 3.1.1.** *Soit  $f : [a, b] \rightarrow F$  une application continue, et différentiable sur  $]a, b[$ . Supposons qu'il existe une constante  $K$  telle que  $\|f'(t)\| \leq K$  pour tout  $t \in ]a, b[$ . Alors*

$$\|f(b) - f(a)\| \leq K(b-a).$$

### 3.2. Cas général

Soit  $E$  un e.v.n. et deux point  $a, b \in E$ . On appelle **segment** d'extrémités  $a$  et  $b$  et on note  $[a, b]$  l'ensemble des points  $x \in E$  de la forme

$$x = (1-t)a + tb, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

On a d'abord un résultat sur le segment.

**Théorème 3.2.1.** *Soient  $E, F$  deux e.v.n.,  $U$  un ouvert de  $E$ ,  $f : U \rightarrow F$  une application différentiable en tout point de  $U$ . Supposons le segment d'extrémités  $a$  et  $b$  soit contenu dans  $U$ . Alors*

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \sup_{x \in [a, b]} \|df(x)\| \|b - a\|.$$

Ici on note  $\|df((1-t)a + tb)\| = M(df((1-t)a + tb))$  le norme d'application linéaire définis dans le théorème 1.2.2.

**Démonstration :** Le théorème de différentiation des applications composées, appliqué à l'application  $h : [0, 1] \rightarrow F, t \rightarrow f((1-t)a + tb)$ , donne

$$h'(t) = df((1-t)a + tb)(b-a),$$

$$\|h'(t)\| \leq \sup_{0 \leq t \leq 1} \|df((1-t)a + tb)\| \|b-a\|.$$

Posons  $K = \sup_{0 \leq t \leq 1} \|df((1-t)a + tb)\|$ , on obtient le résultat en appliquant le corollaire 3.1.1. Q.E.D.

Une partie  $P$  de  $E$  est dite **convexe**, si pour tous  $x, y \in P$ , le segment d'extrémités  $x$  et  $y$  est contenu dans  $P$ . Il résulte immédiatement du théorème précédent le résultat suivant.

**Théorème 3.2.2.** *Soit  $U$  un ouvert convexe de  $E$  et  $f : U \rightarrow F$  une application différentiable dans  $U$  telle que  $\|df(x)\| \leq K$  pour tout  $x \in U$ . Alors  $f$  est  $K$ -lipschitzienne dans  $U$ , i.e.*

$$\|f(b) - f(a)\| \leq K\|b - a\|,$$

pour tout  $a, b \in U$ .

On rappelle qu'un espace topologique  $X$  est dit connexe si les seules parties à la fois ouvertes et fermées dans  $X$  sont la partie vide  $\emptyset$  et la partie totale  $X$ . Les seuls ensembles connexes de  $\mathbb{R}$  sont les intervalles. Les convexes d'un e.v.n sont connexes.

**Théorème 3.2.3.** *Soit  $E$  un e.v.n.,  $U$  un sous-ensemble de  $E$  qui est à la fois ouvert et connexe. alors tout paire de points de  $U$  peuvent être reliés par une ligne brisée contenue dans  $U$ , i.e. : Quelque soit  $a, b \in U$ , il existe un nombre fini de points  $a_1, a_2, \dots, a_m \in U$  tels que  $a = a_1, b = a_m$  et  $[a_j, a_{j+1}] \subset U, j = 1, \dots, m-1$ .*

**Démonstration :** Fixons  $a \in U$ , et posons

$$A = \{b; b \in U, a \text{ peut être reliée à } b \text{ par une ligne brisée } \subset U\},$$

$A$  est ouvert. En effet, soit  $b \in A$ . Alors  $a$  peut être relié à  $b \in U$  par une ligne brisée  $\subset U$ . Puisque  $U$  est ouvert, il existe une boule  $B(b, r) \subset U, r > 0$ , et chaque point de cette boule peut être relié à  $b$  par un segment  $\subset B(b, r) \subset U$ . Donc chaque de  $B(b, r)$  peut être relié à  $a$  par une ligne brisée  $\subset U$ . Il s'en suit donc de  $B(b, r) \subset A$ , i.e.  $A$  est ouvert dans  $U$ . Montrons à présent que  $A$  est fermé dans  $U$ . Soit  $b_j \in A, b_j \rightarrow b, b \in U$ , et montrons  $b \in A$ . Puisque  $b \in U$  et  $U$  est ouvert, il existe  $r > 0$  tel que  $B(b, r) \subset U$ , mais  $b_j \rightarrow b$ , il existe  $j_0$  tel que  $b_{j_0} \in B(b, r)$ . Maintenant  $b_{j_0}$  peut être relié à  $b$  par un segment contenu dans  $B(b, r)$ , et  $a$  peut être relié à  $b_{j_0}$  par une ligne brisée  $\subset U$ , donc  $a$  peut être relié à  $b$  par une ligne brisée  $\subset U$ , donc  $b \in A$ .  $A$  est donc fermé.  $A$  est non-vide puisque  $a \in A$ . Donc  $A = U$ , puisque  $U$  est connexe.

**Théorème 3.2.4.** *Soit  $U$  un ouvert connexe de  $E$ ,  $f : U \rightarrow F$  une application. Alors  $f$  est constante dans  $U$  si et seulement si  $f$  est différentiable et  $df \equiv 0$  sur  $U$ .*

**Démonstration :** Il est évident que si  $f$  est constante alors  $f$  est différentiable et  $df \equiv 0$ .

Réciproquement, soient  $a, b \in U$ , il existe donc  $a_0 = a, a_1, \dots, a_{m-1}, a_m = b$  tels que les segments  $[a_{j-1}, a_j] \subset U, j = 1, \dots, m$ . Puisque  $df \equiv 0$  sur  $[a_{j-1}, a_j]$ , on a, d'après le résultat du théorème 3.2.1,  $f(a_{j-1}) - f(a_j) = 0$ . Donc  $f(a) = f(a_1) = \dots = f(b)$ , donc  $f$  est constante sur  $U$ . Q.E.D.

Dans le théorème 2.4.2, on a démontré que si une application est différentiable, alors elle est partiellement différentiable. Maintenant nous voudrions démontrer la réciproque conditionnelle de ce théorème.

**Proposition 3.2.1.** *Soient  $E, F$  deux e.v.n,  $U \subset E, f : U \rightarrow F$  une application différentiable. Soit  $B(a, r)$  une boule ouverte de centre  $a$  et de rayon  $r > 0$  contenue*

dans  $U$ . Soit  $T \in \mathcal{L}(E, F)$  telle que  $\|df(x) - T\| \leq \varepsilon$  pour tout  $x \in B(a, r)$ . Alors

$$\|f(x+y) - f(x) - T(y)\| \leq \varepsilon\|y\|,$$

pour tous  $x, y \in B(a, r)$  avec  $x+y \in B(a, r)$ .

**Démonstration** : Posons  $g = f - T, g : B(a, r) \rightarrow F$ , on a  $dg = df - T$  et  $\|dg(x)\| \leq \varepsilon$  sur  $B(a, r)$ . D'après le théorème 3.2.2, on  $\|g(x+y) - g(x)\| \leq \varepsilon\|y\|$ , i. e.

$$\|f(x+y) - f(x) - T(x+y) + T(x)\| = \|f(x+y) - f(x) - T(y)\| \leq \varepsilon\|y\|,$$

pour tous  $x, y \in B(a, r)$  avec  $x+y \in B(a, r)$ .

Le théorème suivant est la réciproque conditionnelle du théorème 2.4.2.

**Théorème 3.2.5.** Soient  $E_1, E_2, \dots, E_n$  des e.v.n. de dimension finie,  $U$  un ouvert de  $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ ,  $f : U \rightarrow F$  où  $F$  est un e.v.n. de dimension finie. Soit  $a = (a_1, \dots, a_n) \in U$ . Supposons que dans un voisinage de  $a$ , les différentielles partielles  $d_j f(a), 1 \leq j \leq n$  existent et sont **continues** en  $a$ . Alors  $f$  est différentiable en  $a$  et  $df(a)(h_1, \dots, h_n) = \sum_{j=1}^n d_j f(a)(h_j)$ .

**Démonstration** : Supposons d'abord  $n = 2$ , et on utilise la somme des normes sur  $E_1 \times E_2$ . Comme  $d_j f(x, y), j = 1, 2$  sont continues en  $a$ , pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que, dès que  $\|(h_1, h_2)\| < \delta$ , on a

$$\begin{aligned} \|d_j f(a_1, a_2 + h_2) - d_j f(a_1, a_2)\| &< \frac{\varepsilon}{3}, \\ \frac{\|f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2 + h_2) - d_1 f(a_1, a_2 + h_2)(h_1)\|}{\|h_1\|} &< \frac{\varepsilon}{3}, \\ \frac{\|f(a_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2) - d_2 f(a_1, a_2)(h_2)\|}{\|h_1\|} &< \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

Nous avons donc démontré que, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que pour tout  $(h_1, h_2) \in E_1 \times E_2, \|(h_1, h_2)\| < \delta$ , qu'on a

$$\begin{aligned} &\frac{\|f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2) - d_1 f(a_1, a_2)(h_1) - d_2 f(a_1, a_2)(h_2)\|}{\|(h_1, h_2)\|} \\ &\leq \frac{\|f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2 + h_2) - d_1 f(a_1, a_2 + h_2)(h_1)\|}{\|h_1\|} \\ &+ \frac{\|f(a_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2) - d_2 f(a_1, a_2)(h_2)\|}{\|h_1\|} \\ &+ \frac{\|d_1 f(a_1, a_2 + h_2)(h_1) - d_1 f(a_1, a_2)(h_1)\|}{\|h_1\|} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Ce qui veut dire que  $f$  est différentiable en  $(a_1, a_2)$  et que sa différentiable est  $d_1 f(a_1, a_2)(h_1) + d_2 f(a_1, a_2)(h_2) = df(a_1, a_2)(h_1, h_2)$ .

En suite où  $n = 3$ , on applique le cas  $n = 2$  au produit  $V \times E_3$  où  $V = E_1 \times E_2$ . Et ainsi de suite ... Q.E.D.

Remarquons qu'à ici la "continuité" des différentielles partielles  $d_j f(a), 1 \leq j \leq n$  est très important. Sinon il existe beaucoup de contre-exemple, i. e. il existe des fonctions qui sont partiellement différentiables, mais globalement non-différentiables.

En combinant le théorème 2.4.2 et le théorème 3.2.5, on a démontré le résultat suivant :

**Théorème 3.2.6.** *Soient  $E_1, E_2, \dots, E_n$  des e.v.n. de dimension finie,  $U$  un ouvert de  $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ ,  $f : U \rightarrow F$  où  $F$  est un e.v.n. de dimension finie. Pour que  $f$  soit de classe  $C^1(U)$  il faut et il suffit que  $f$  ait des différentielles partielles  $d_j f, j = 1, \dots, n$  et que les applications  $d_j f : U \rightarrow \mathcal{L}(E_j, F)$  soient continues.*

### 3.3. Quelques applications

On étudie maintenant une suite d'applications différentiables de  $U$  dans  $F$ , où  $E, F$  deux e.v.n., et  $U$  un ouvert de  $E$ .

**Théorème 3.3.1.** *Soit  $E, F$  deux e.v.n.,  $U$  un ouvert convexe de  $E$  et  $(f_j)$  une suite d'applications différentiable de  $U$  dans  $F$ . Supposons que :*

(i) *Il existe un point  $a \in U$  tel que la suite  $(f_j(a))$  soit convergente.*

(ii) *La suite  $(df_j)$  des applications de  $U$  dans  $\mathcal{L}(E, F)$  converge uniformément dans  $U$  vers une application  $g : U \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$ .*

*Alors, pour chaque  $x \in U$ , la suite  $(f_j(x))$  converge vers une limite, que l'on notera  $f(x)$ . Cette convergence est uniforme sur chaque partie bornée de  $U$ . Enfin,  $f$  est différentiable et  $df = g$ .*

**Démonstration :** Comme  $U$  est un ouvert convexe, d'après le théorème 3.2.2, on a

$$\|f_k(x) - f_k(a) - (f_j(x) - f_j(a))\| \leq \|x - a\| \sup_{y \in U} \|df_k(y) - df_j(y)\|.$$

On en déduit que la suite  $(f_j)$  est convergente uniformément sur chaque partie bornée de  $U$ , car  $(df_j)$  est une suite de Cauchy uniforme dans  $U$ ,  $(f_j(a))$  est une suite de Cauchy, donc pour  $x \in U$  avec  $\|x - a\|$  borné,  $(f_j(x))$  est aussi une suite de Cauchy. Soit maintenant  $f$  la limite uniforme de la suite des applications continues  $(f_j)$ , alors  $f$  est continue dans  $U$  (laisse comme un exercice pour les lecteurs).

Il reste à montrer que  $f$  est différentiable dans  $U$ , et que  $df(x) = g(x)$ . Pour ce faire, soit  $x_0 \in U$ , on a

$$\begin{aligned} \|f(x_0 + h) - f(x_0) - g(x_0)(h)\| &\leq \|f(x_0 + h) - f(x_0) - (f_j(x_0 + h) - f_j(x_0))\| \\ &\quad + \|f_j(x_0 + h) - f(x_0) - df_j(x_0)(h)\| \\ &\quad + \|df_j(x_0)(h) - g(x_0)(h)\|. \end{aligned}$$

Quelque soit  $h \in E$ , et  $\epsilon > 0$  petit, en utilisant la convergence uniforme de  $(f_j)$ , il existe  $N_0 > 0$  tel que pour tout  $j \geq N_0$ ,

$$\|f(x_0 + h) - f(x_0) - (f_j(x_0 + h) - f_j(x_0))\| \leq \epsilon \|h\|.$$

D'autre part, il existe  $N_1$  assez grand tel que pour tout  $j \geq N_1 - 1$ ,

$$\|(df_j(x_0) - g(x_0))(h)\| \leq \epsilon \|h\|.$$

Fixons  $j_0 \geq \max(N_0, N_1)$ ,  $f_{j_0}$  est différentiable en  $a$ , donc il existe  $\delta > 0$  tel que pour tout  $\|h\| \leq \delta$ , on ait

$$\|f_{j_0}(x_0 + h) - f_{j_0}(x_0) - df_{j_0}(x_0)(h)\| \leq \epsilon \|h\|.$$

On en déduit que

$$\|f(x_0 + h) - f(x_0) - g(x_0)(h)\| \leq 3\epsilon\|h\|,$$

dès que  $\|h\| \leq \delta$ , d'où le résultat.

On peut s'affranchir de l'hypothèse de convexité faite sur  $U$  dans le théorème précédente.

**Théorème 3.3.2.** *Soit  $U$  un ouvert connexe de  $E$ , et  $(f_j)$  une suite d'applications différentiables de  $U$  dans  $F$ . Supposons que*

(i) *Il existe un point  $a \in U$  tel que la suite  $(f_j(a))$  soit convergente.*

(ii) *Pour tout  $x_0 \in U$ , il existe une boule centrée en  $x_0$  dans laquelle la suite  $(df_j)$  converge uniformément vers  $g$ .*

*Alors, pour chaque  $x \in U$ , la suite  $(f_j(x))$  converge vers une limite, que l'on notera  $f(x)$ . Cette convergence est uniforme sur toutes boules de  $U$ . Enfin,  $f$  est différentiable et  $df = g$ .*

**Démonstration :** Ce théorème est une conséquence facile du théorème précédent. Le seul point à montrer est que la suite est convergente pour tout  $x \in U$ . Pour ce faire, on considère  $\mathcal{X}$  l'ensemble des points  $x$  où  $(f_j(x))$  converge. On a alors

1)  $\mathcal{X}$  est non vide, il contient  $a$  par hypothèse.

2)  $\mathcal{X}$  est ouvert d'après le théorème précédent, car si  $x_0 \in \mathcal{X}$ , il existe alors un boule (bien sûre convexe) ouverte centrée en  $x_0$  dans laquelle  $(f_j)$  converge uniformément.

3)  $\mathcal{X}$  est fermé. En effet, si  $x_1$  est un point adhérent à  $\mathcal{X}$ , on a d'abord que la suite  $(df_j)$  converge uniformément par hypothèse dans une boule  $B(x_1, r)$ , et comme  $x_1$  est adhérent à  $\mathcal{X}$ , il existe  $y_1 \in \mathcal{X}$  tel que  $\|x_1 - y_1\| < r/2$ , donc  $B(y_1, r/2) \subset B(x_1, r)$  et  $x_1 \in B(y_1, r/2)$ . Maintenant,  $B(y_1, r/2)$  est une boule (convexe!) ouverte,  $(f_j(y_1))$  converge (car  $y_1 \in \mathcal{X}$ ), et  $(df_j)$  converge uniformément dans  $B(y_1, r/2)$ . Donc  $(f_j)$  converge uniformément dans  $B(y_1, r/2)$  en vertu du théorème précédent, en particulier au  $x_1$ , d'où  $x_1 \in \mathcal{X}$ .

Parce que  $U$  est connexe, on a démontré  $\mathcal{X} = U$ .

### 3.4. Intégration des fonctions à valeurs dans e.v.n.

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction différentiable, on a la formule de Taylor avec reste intégral

$$f(x+h) = f(x) + \int_0^1 f'(x+th)h dt.$$

Parce qu'on a étudié seulement la différentielle du première ordre, on l'écrit seulement jusqu'à l'ordre 1. On va généraliser cette formule à des applications différentiables entre deux e.v.n., pour ce faire, on donne la définition suivante.

**Définition 3.4.1.** *Soit  $f : [a, b] \rightarrow F$ ,  $f$  est dite une application en escalier, s'il existe une subdivision  $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n = b$  de  $[a, b]$  telle que  $f$  soit constante sur chacun des intervalles ouverts  $]x_i, x_{i+1}[$ ,  $i = 0, \dots, n-1$ . L'ensemble de ces fonctions sera noté  $\mathcal{E}([a, b]; F)$ .*

**Remarques :**

(i)  $\mathcal{E}([a, b]; F)$  est un espace vectoriel.

(ii) Pour  $f \in \mathcal{E}([a, b]; F)$  on pose  $\|f\|_{C^0} = \sup_{[a, b]} \|f\|_F$ , c'est la norme de la convergence uniforme sur  $[a, b]$ .

**Définition 3.4.2.** Soit  $f \in \mathcal{E}([a, b]; F)$ , si  $f(x) = c_i, x \in ]x_i, x_{i+1}[$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$ . On définit l'intégrale de  $f$  sur  $[a, b]$  par

$$I(f) = \int_a^b f(t)dt = \sum_{i=0}^{n-1} c_i(x_{i+1} - x_i).$$

**Théorème 3.4.1.**  $I$  est une application linéaire continue de  $\mathcal{E}([a, b]; F)$  dans  $F$ .

**Démonstration :**  $I$  est évidemment linéaire. Pour la continuité, il suffit de montrer

$$\|I(f)\|_F \leq |b - a| \|f\|_{C^0},$$

mais c'est aussi évident.

**Définition 3.4.3.** Le complété de l'espace normé  $\mathcal{E}([a, b]; F)$  est appelé l'espace des applications réglées et est notés  $\mathcal{R}([a, b]; F)$ .

**Théorème 3.4.2.** Soit  $f : [a, b] \rightarrow F$  une application continue, alors  $f \in \mathcal{R}([a, b]; F)$ .

**Démonstration :** Par définition, quelque soit  $\epsilon > 0$ , on doit trouver une application escaliers  $g$  telle que

$$\|f - g\|_{C^0} \leq \epsilon.$$

Comme  $f$  est continue sur  $[a, b]$ , quelque soit  $y \in [a, b]$ , il existe  $\delta > 0$  tel que

$$\|f(x) - f(y)\|_F \leq \epsilon/2, \quad \forall x \in [a, b] \cap ]y - \delta, y + \delta[.$$

En utilisant le théorème de recouvrement de Lebesgue, il existe un nombre fini des ouverts  $I_i = [a, b] \cap ]y_i - \delta_i, y_i + \delta_i[$ ,  $i = 1, \dots, m$ , vérifiant  $[a, b] = \bigcup_{i=1}^m I_i$ , et pour tout  $x, y \in I_i$ , on a  $\|f(x) - f(y)\| \leq \epsilon$ . On définit maintenant la subdivision de  $[a, b]$  comme suivant :  $x_0 = a$  et  $x_1$  est l'extrémité à droite de  $I_1$  dont  $a \in I_1$ , comme  $x_1$  doit aussi contenant dans un autre  $I_2$ , on prends  $x_2$  l'extrémité à droite de  $I_2$ , par récurrence, on peut construire une subdivision  $x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$  avec  $n \leq m$ , on définit  $g(x) = f(x_i)$  si  $x \in ]x_i, x_{i+1}[$ , pour  $i = 0, 1, n-1$ . On a alors  $g \in \mathcal{E}([a, b]; F)$ , et  $\|f - g\| \leq \epsilon$ .

**Proposition 3.4.1.** Soit  $f \in \mathcal{R}([a, b]; F)$  la limite uniforme d'une suite d'applications en escalier  $(f_j)$ , alors  $I(f_j)$  est convergente, et la limite  $\lim_{j \rightarrow \infty} I(f_j)$  ne dépend pas de la suite utilisée pour approcher  $f$ .

**Démonstration :** Nous allons démontrer que  $(I(f_j))$  est une suite de Cauchy dans  $\mathbb{R}$ . En utilisant la linéarité et la continuité de  $I(\cdot)$ , on a

$$|I(f_k) - I(f_j)| = |I(f_k - f_j)| \leq |b - a| \|f_k - f_j\|_{C^0},$$

comme  $(f_j)$  converge vers  $f$  sous la norme  $\|\cdot\|_{C^0}$ , donc elle est une suite de Cauchy sous cette norme, donc  $(I(f_j))$  est une suite convergente.

Maintenant si  $f$  est approchée aussi par une autre suite d'application en escalier  $(g_k)$ , la suite  $(\dots, f_k, g_k, f_{k+1}, g_{k+1}, \dots) = (h_l)$  approche aussi à  $f$ , il est évident que

$$\lim I(h_l) = \lim I(f_k) = \lim I(g_k).$$

**Définition 3.4.4.** Si  $f \in \mathcal{R}([a, b]; F)$ , l'intégrale de  $f$  sur  $[a, b]$  est par définition :

$$I(f) = \int_a^b f(t)dt = \lim I(f_j),$$

où  $(f_j)$  est une suite d'applications en escalier convergeant uniformément vers  $f$ .

Il est clair que  $I(\cdot)$  est aussi linéaire continue.

**Proposition 3.4.2.** 1) Soit  $f \in \mathcal{R}([a, b]; F)$ , on définit  $g : [a, b] \rightarrow F$  par

$$t \rightarrow g(t) = \int_a^t f(x)dx.$$

Si  $f$  est continue, alors  $g$  est de la classe  $C^1$  et  $g' = f$ .

2) Si  $g$  est une application de la classe  $C^1$  de  $[a, b] \rightarrow F$ , alors

$$g(b) - g(a) = \int_a^b g'(t)dt.$$

La preuve de la partie 1) est laissée à titre d'exercice. Pour la partie 2), comme  $g'$  est continue, on  $G(t) = \int_a^t g'(x)dx$  est de la classe  $C^1$  et  $G'(t) = g'(t)$ , d'après le résultat de partie 1). Donc  $(g - G)'(t) = 0$  sur  $[a, b]$  et  $g - G = \text{constante}$ , par conséquent

$$g(b) - g(a) = G(b) - G(a) = \int_a^b g'(t)dt.$$

**Théorème 3.4.3.** Soit  $U$  un ouvert de  $E$ ,  $f : U \rightarrow F$  une application de la classe  $C^1$  et soient  $x, h \in E$  tels que  $[x, x + h] \subset U$ , alors

$$f(x + h) = f(x) + \int_0^1 df(x + th)(h)dt.$$

**Démonstration :** Posons  $g(t) = f(x + th)$  pour  $t \in [0, 1]$ . Alors  $g$  est de la classe  $C^1$  et  $g'(t) = df(x + th)(h)$ . D'après la proposition 3.4.2, on a

$$g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(t)dt.$$

Soit

$$f(x + h) = f(x) + \int_0^1 df(x + th)(h)dt.$$

Nous avons donc la formule de Taylor pour une application de la classe  $C^1$ .

Si  $E = \mathbb{R}^n$ ,  $F = \mathbb{R}^m$ ,  $U$  un ouvert convexe de  $\mathbb{R}^n$ , en utilisant la matrice jacobienne pour  $f : U \rightarrow F$  une application de classe  $C^1$ , on a pour tout  $a, b \in U$

$$f(b) - f(a) = \begin{pmatrix} \int_0^1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1}((1-t)a + tb)dt & \cdots & \int_0^1 \frac{\partial f_1}{\partial x_n}((1-t)a + tb)dt \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \int_0^1 \frac{\partial f_m}{\partial x_1}((1-t)a + tb)dt & \cdots & \int_0^1 \frac{\partial f_m}{\partial x_n}((1-t)a + tb)dt \end{pmatrix} (b - a).$$

c'est-à-dire

$$f_j(b) - f_j(a) = \sum_{k=1}^n \int_0^1 \frac{\partial f_j}{\partial x_k}((1-t)a + tb)(b_k - a_k)dt, \quad j = 1, \dots, m$$

### 3.5. Différentielles d'ordre supérieur. Formule de Taylor

Soit  $f : U \rightarrow F$  est une application de la classe  $C^1$ , alors  $df : U \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$  est une application continue, c'est aussi une application de  $U$  dans un espace vectoriel normé, si elle est encore différentiable, on a  $d(df)(a) = d^2f(a) \in \mathcal{L}(E; \mathcal{L}(E; F)) = \mathcal{L}(E, E; F)$ , c'est une application bilinéaire de  $E \times E$  dans  $F$ . De même si  $d^2f : U \rightarrow \mathcal{L}(E, E; F)$  est continue, on dit que  $f$  est dans la classe  $C^2(U)$ . Par récurrence sur  $n$ , on dit que  $f : U \rightarrow F$  est  $n$  fois différentiable, si  $d^{n-1}f : U \rightarrow \mathcal{L}(E, \dots, E; F)$  est de la classe  $C^1(U)$ , et on dit que  $f$  est de la classe  $C^n(U)$ .  $d^n f(a)$  est une application  $n$ -multilinéaire de  $E \times \dots \times E$  dans  $F$ .

En fait, on peut montrer que  $d^2f(a)$  est une application bilinéaire symétrique i. e.  $d^2f(a)(h, k) = d^2f(a)(k, h)$ .

**Théorème 3.5.1.** *Soit  $f : U \rightarrow F$  une application de classe  $C^1$  et deux fois différentiables en  $a \in U$ . On a alors*

$$d^2f(a)(h, k) = d^2f(a)(k, h), \quad \forall (h, k) \in E \times E.$$

**Démonstration :** Posons

$$\phi(h, k) = f(a + h + k) - f(a + h) - f(a + k) + f(a),$$

On a

$$\begin{aligned} \|\phi(h, k) - d^2f(a)(k)(h)\| &\leq \|\phi(h, k) - df(a + k)(h) + df(a)(h)\| \\ &\quad + \|df(a + k)(h) - df(a)(h) - d^2f(a)(k)(h)\|, \end{aligned}$$

ce dernier terme est majoré par

$$\|h\| \|df(a + k) - df(a) - d^2f(a)(k)\| \leq \epsilon \|h\| \|k\|,$$

si  $\|k\| < \delta$ , donc est majoré par  $\|h\|o(\|h\| + \|k\|)$ . Pour le premier terme, le théorème des accroissements fins appliqués à  $\|A(h) - A(0)\|$  avec

$$A(h) = f(a + k + h) - f(a + h) - df(a + k)(h) + df(a)(h),$$

On a

$$\|\phi(h, k) - df(a + k)(h) + df(a)(h)\| \leq \|h\| \sup_{0 \leq t \leq 1} \|df(a + k + th) - df(a + th) - df(a + k) + df(a)\|.$$

Comme  $df$  est différentiable en  $a$ , on a

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} \|df(a + k + th) - df(a + th) - df(a + k) + df(a)\| \leq \epsilon(\|h\| + \|k\|),$$

si  $\|k + th\|, \|th\|, \|k\| < \delta$ . D'où

$$\|\phi(h, k) - d^2f(a)(k)(h)\| \leq \epsilon(\|h\| + \|k\|)^2,$$

si  $\|h\| + \|k\| < \delta$ . Comme  $\phi(h, k) = \phi(k, h)$ , on a donc démontré le théorème.

**Remarque :** On a en fait démontré qu'une application  $f : U \rightarrow F$  de classe  $C^1$  est deux fois différentiable, si et seulement s'il existe une application bilinéaire  $l \in \mathcal{L}(E, E; F)$  telle que

$$\lim_{\|h\| + \|k\| \rightarrow 0} \frac{\|f(a + h + k) - f(a + h) - f(a + k) + f(a) - l(h, k)\|}{(\|h\| + \|k\|)^2} = 0.$$

**Corollaire 3.5.1.** *Soit  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , si  $d^2 f$  existe en  $(a, b) \in U$ , alors*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b).$$

En effet,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) = d^2 f(a, b)(e_2)(e_1) = d^2 f(a, b)(e_1)(e_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b),$$

où  $(e_1, e_2)$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ .

La forme bilinéaire symétrique  $d^2 f(a, b)$  a pour matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) \end{pmatrix},$$

et  $d^2 f(a, b)(h, k)$  avec  $h = (h_1, h_2), k = (k_1, k_2)$  s'écrit matriciellement

$$(h_1, h_2) \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}.$$

Nous généralisons maintenant le théorème 3.4.3.

**Théorème 3.5.2.** *(formule de Taylor avec reste intégral) Soient  $f : U \rightarrow F$  une application de la classe  $C^{n+1}$ , et  $[a, a + h]$  est contenu dans  $U$ , On a alors*

$$f(a + h) = f(a) + \sum_{j=1}^n \frac{1}{j!} d^j f(a)(h)^j + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} d^{n+1} f(a + th)(h)^{n+1} dt.$$

On a aussi

**Théorème 3.5.3.** *(Formule de Taylor avec reste de Lagrange) Soient  $f : U \rightarrow F$  une application de la classe  $C^{n+1}$ , Supposons  $\sup_{x \in U} \|d^{n+1} f(x)\| \leq M$  alors*

$$\|f(a + h) - f(a) - \sum_{j=1}^n \frac{1}{j!} d^j f(a)(h)^j\| \leq \frac{M}{(n+1)!} \|h\|^{n+1}.$$

Et

**Théorème 3.5.4.** *(formule de Taylor avec reste de Young) Soient  $f : U \rightarrow F$  une application de la classe  $C^{n-1}$ , et  $d^{n-1} f$  est différentiable en  $a \in U$ . On a alors*

$$\|f(a + h) - f(a) - \sum_{j=1}^n \frac{1}{j!} d^j f(a)(h)^j\| = o(\|h\|^n).$$

### 3.6. Extrema relatifs

On étudie maintenant des fonctions de  $n$ -variables.  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .

**Définition 3.6.1.** Soit  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de  $n$ -variables. On dit que  $a = (a_1, \dots, a_n) \in U$  est un maximum relatif (resp. minimum) s'il existe un voisinage  $V(a) \subset U$  tel que

$$\forall x \in V(a), \quad f(x) \leq f(a) \quad (\text{resp. } f(x) \geq f(a)).$$

Il est strict si l'inégalité est stricte.

**Théorème 3.6.1.** (Condition nécessaire) Soit  $f$  une fonction de classe  $C^1(U)$ . Si  $f$  admet un extremum en  $a \in U$ , on a alors  $df(a) = 0$ .

**Démonstration :** Soit  $h \in \mathbb{R}^n$  quelconque, soit  $g(t) = f(a+th)$  définie pour  $|t| < \delta$ .  $g$  est alors une fonction de  $] -\delta, \delta[ \rightarrow \mathbb{R}$  qui a un extremum en  $t = 0$ . Donc  $g'(0) = 0$ , soit  $df(a)(h) = 0$  pour tout  $h$ , donc l'application linéaire  $df(a)$  est identiquement nulle.

**Théorème 3.6.2.** (Condition suffisante) Soit  $f$  deux fois différentiables sur  $U$ . Si  $df(a) = 0$  et  $d^2f(a)$  est une forme quadratique positive non dégénérée, alors  $f$  admet un minimum strict en  $a$ .

**Démonstration :** On utilise la formule de Taylor

$$f(a+h) = f(a) + \frac{1}{2}d^2f(a)(h, h) + o(\|h\|^2).$$

Comme  $d^2f(a)$  est une forme quadratique positive non dégénérée, sur la sphère  $\|h\| = 1$  qui est compacte,  $d^2f(a)(h, h)$  atteint son minimum qui est strictement positif soit  $\mu$ . Alors pour tout  $k \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , on a

$$d^2f(a) \left( \frac{k}{\|k\|}, \frac{k}{\|k\|} \right) \geq \mu,$$

donc

$$d^2f(a)(k, k) \geq \mu\|k\|^2.$$

D'où pour  $\|h\|$  assez petit  $\neq 0$ ,  $o(\|h\|^2) < \frac{\mu}{4}\|h\|^2$  et

$$f(a+h) - f(a) \geq \left( \frac{\mu}{2} - \frac{\mu}{4} \right) \|h\|^2 > 0.$$



## Théorème d'inversion locale

### 4.1. Théorème d'inversion locale

Rappelons d'abord le théorème d'inversion locale classique. Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^1$  (i. e.  $f'$  est aussi continue). Supposons que  $f'(a) \neq 0$  pour un certain  $a \in \mathbb{R}$ . Il existe alors un intervalle ouvert  $I$ , contenant  $a$ , où  $f'$  garde un signe constant. Ainsi  $f$  est monotone sur  $I$  et réalise une bijection de  $I$  sur l'intervalle ouvert  $J = f(I)$ . D'autre part, on sait que  $f^{-1} : J \rightarrow I$  est de classe  $C^1$  et que

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Nous allons généraliser ce résultat au cas des applications différentiable d'un espace vectoriel normé  $E$  de dimension finie dans un autre espace vectoriel normé  $F$  de dimension finie. La démonstration est assez longue, **ce sera la seule démonstration difficile de ce cours.**

**Définition 4.1.1.** Soient  $U \subset E, V \subset F$  des ouverts,  $f : U \rightarrow V$ .

(1) On dit que  $f$  est un homéomorphisme de  $U$  sur  $V$ , si  $f$  est une bijection de  $U$  sur  $V$ , et  $f$  continue dans  $U$ , et  $f^{-1}$  continue dans  $V$ .

(2) On dit que  $f$  est un  $C^1$ -difféomorphisme de  $U$  sur  $V$ , si  $f$  est une bijection de  $U$  sur  $V$ , et  $f$  de classe  $C^1$  dans  $U$ , et  $f^{-1}$  aussi de classe  $C^1$  dans  $V$ .

Il est évident qu'un  $C^1$ -difféomorphisme est un homéomorphisme. Mais une application de classe  $C^1$   $f : U \rightarrow V$  peut être un homéomorphisme sans être un  $C^1$ -difféomorphisme, autrement dit,  $f^{-1} : V \rightarrow U$  n'est pas nécessairement de classe  $C^1$ . Voir l'exemple suivant.

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction définie par  $f(x) = x^3$ , c'est un homéomorphisme de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}$ , mais l'application réciproque  $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f^{-1}(y) = y^{1/3}$  n'est pas différentiable à l'origine.

**Proposition 4.1.1.** (Condition nécessaire d'un difféomorphisme)

Soit  $f : U \rightarrow V$  un  $C^1$ -difféomorphisme, alors  $df(x) \in \text{Isom}(E, F)$  pour tout  $x \in U$ , et a pour inverse  $df^{-1}(f(x))$ .

La preuve découle trivialement du théorème de différentiation des applications composées.

**Remarques :**

(1) L'existence d'un  $C^1$ -difféomorphisme d'un ouvert de  $E$  dans un ouvert de  $F$  entraîne donc que  $E$  et  $F$  sont isomorphes. En particulier, leurs dimensions sont égales.

(2) Si  $f : U \rightarrow F$  est une application de classe  $C^1$  telle que  $df(x) \in \text{Isom}(E, F)$ ,  $f$  n'est pas **nécessairement** un  $C^1$ -difféomorphisme de  $U$  dans  $f(U)$ . Voir l'exemple

suisant :  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par  $f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$ , la matrice jacobienne de  $f$  est

$$\begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix}.$$

Comme le déterminant  $|df(x, y)| = e^{2x} \neq 0$  pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $f$  est de classe  $C^1$  et  $df(x, y) \in \text{Isom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ . Mais  $f$  n'est pas injective (i.e. même pas un homéomorphisme) de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$ , car  $f(x, y + 2\pi) = f(x, y)$ . **Attention** qu'ici on a considéré le problème global.

**Proposition 4.1.2.** (Condition nécessaire et suffisante pour qu'un homéomorphisme soit un difféomorphisme)

*Soit  $f : U \rightarrow V$  un homéomorphisme et de classe  $C^1$ . Pour que  $f$  soit un  $C^1$ -difféomorphisme, il faut et il suffit que  $df(x) \in \text{Isom}(E, F)$  pour tout  $x \in U$ .*

**Démonstration :** On a déjà vu que la condition est nécessaire. Montrons qu'elle est suffisante, i. e. soit  $a \in U$  tel que  $df(a) \in \text{Isom}(E, F)$  et montrons que  $f^{-1}$  est différentiable au point  $f(a)$ .

Posons  $h = f^{-1}(f(a) + k) - a$ , comme  $f^{-1}$  est continue,  $h$  tend vers 0 avec  $k = f(a + h) - f(a)$ . Donc pour  $k$  assez petit

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(a) + k) - f^{-1}(f(a)) - (df(a))^{-1}(k) &= h - (df(a))^{-1}(f(a + h) - f(a)) \\ &= h - (df(a))^{-1}(df(a)(h) + o(h)\|h\|) \\ &= -(df(a))^{-1}(o(h)\|h\|), \end{aligned}$$

d'où

$$\|f^{-1}(f(a) + k) - f^{-1}(f(a)) - (df(a))^{-1}(k)\| \leq \|(df(a))^{-1}\| \|o(h)\| \|h\|.$$

D'autre part, comme  $h$  tend vers 0 avec  $k$ , on a pour  $\|k\|$  assez petit

$$\begin{aligned} \|(df(a))^{-1}(k)\| &= \|h + (df(a))^{-1}(o(h)\|h\|)\| \\ &\geq \|h\| - \|(df(a))^{-1}(o(h)\|h\|)\| \\ &\geq 1/2\|h\|. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\|h\| \leq 2\|(df(a))^{-1}\| \|k\|.$$

Donc

$$\frac{\|f^{-1}(f(a) + k) - f^{-1}(f(a)) - (df(a))^{-1}(k)\|}{\|k\|} \leq 2\|(df(a))^{-1}\|^2 \|o(h)\| \rightarrow 0$$

lorsque  $\|k\| \rightarrow 0$ , d'où la différentiabilité de  $f^{-1}$  au point  $f(a)$ . Comme  $f(a)$  est un point quelconque de  $V$ , on a démontré que  $f^{-1}$  est différentiable dans  $V$ , et pour tout  $y \in V$ , on a

$$df^{-1}(y) = (df(f^{-1}(y)))^{-1},$$

Il est claire que  $df^{-1}$  est continue comme composée de trois applications continues  $((\cdot)^{-1} \circ df \circ f^{-1})$ , d'où le résultat.

Nous avons aussi besoin du théorème du point fixe.

**Définition 4.1.2.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique complet. On dit que  $f : X \rightarrow X$  est une **contraction**, s'il existe  $K, 0 \leq K < 1$  tel que  $d(f(x), f(y)) \leq Kd(x, y)$  pour tous  $x, y \in X$ . On dit parfois que  $K$  est une constante de contraction.

C'est-à-dire qu'une application  $K$ -lipschitzienne est une contraction si  $K < 1$ .

**Théorème 4.1.1.** (théorème du point fixe) Soit  $(X, d)$  un espace métrique complet,  $f$  une contraction de  $X$  dans  $X$ . Alors  $f$  admet un point fixe unique.

**Démonstration :** Nous allons démontrer qu'il existe un unique point  $y \in X$  tel que  $f(y) = y$ .

Fixons un point  $x_0 \in X$ , et définissons par récurrence  $x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \dots, x_{n+1} = f(x_n), \dots$ . On a, si  $m < n$ ,

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_{m+1}) + \dots + d(x_{n-1}, x_n),$$

or

$$\begin{aligned} d(x_2, x_1) &= d(f(x_1), f(x_0)) \leq Kd(x_1, x_0) \\ d(x_3, x_2) &= d(f(x_2), f(x_1)) \leq Kd(x_2, x_1) \leq K^2d(x_1, x_0) \\ &\dots \end{aligned}$$

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(f(x_n), f(x_{n-1})) \leq Kd(x_n, x_{n-1}) \leq \dots \leq K^n d(x_1, x_0),$$

donc

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_1, x_0)(K^m + \dots + K^n) = d(x_1, x_0)K^m \frac{1 - K^{n-m+1}}{1 - K} \rightarrow 0,$$

lorsque  $m \rightarrow \infty$  car  $K < 1$ .  $\{x_n\}$  est donc une suite de Cauchy dans l'espace métrique complet  $X$ , donc elle converge vers  $y \in X$ . Ensuite  $f(x_n) \rightarrow f(y)$  par continuité de  $f$ , et  $f(x_n) = x_{n+1} \rightarrow y$ , donc  $f(y) = y$ .

Pour l'unicité, on suppose qu'il existe deux points  $x, y \in X$  tels que  $f(x) = x, f(y) = y$ , alors

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq Kd(x, y),$$

donc  $d(x, y) = 0$  car  $K < 1$ .

**Corollaire 4.1.1.** Soit  $X$  un espace métrique complet et notons  $\bar{B} = \bar{B}(x_0, r)$  la boule fermée de centre  $x_0$  et de rayon  $r$ . Soit  $f : \bar{B}(x_0, r) \rightarrow X$  une contraction de constante  $K < 1$ , et supposons que  $d(f(x_0), x_0) \leq (1 - K)r$ . Alors  $f$  admet un point fixe dans  $\bar{B}(x_0, r)$ .

Il suffit de montrer que  $f(\bar{B}) \subset \bar{B}$ . On a, si  $y \in \bar{B}$ ,

$$d(f(y), x_0) \leq d(f(y), f(x_0)) + d(f(x_0), x_0) \leq Kd(y, x_0) + (1 - K)r \leq r.$$

**Corollaire 4.1.2.** Soit  $X$  un espace métrique complet et notons  $B(x_0, r)$  la boule ouverte de centre  $x_0$  et de rayon  $r$ . Soit  $f : B(x_0, r) \rightarrow X$  une contraction de constante  $K < 1$ , et supposons que  $d(f(x_0), x_0) < (1 - K)r$ . Alors  $f$  admet un point fixe dans  $B(x_0, r)$ .

Comme il existe  $r' < r$  telle que  $d(f(x_0), x_0) = (1 - K)r'$ , on travaille sur la boule fermée  $\bar{B}(x_0, r') \subset B(x_0, r)$ .

**Théorème 4.1.2.** (Théorème d'inversion locale)

Soit  $f : U \rightarrow F$  une application de classe  $C^1$ , supposons que, en point  $a \in U$ , on ait  $df(a) \in \text{Isom}(E, F)$ , alors il existe un ouvert  $U_1 \subset U$  contenant  $a$  et un ouvert  $V_1 \subset F$  contenant  $f(a)$  tels que la restriction de  $f$  à  $U_1$  soit un  $C^1$ -difféomorphisme de  $U_1$  dans  $V_1$ .

**Démonstration :** Nous faisons notre démonstration en trois étapes.

### 1ere étape

Comme  $[df(a)]^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$ , posons  $f_1 = [df(a)]^{-1} \circ f$ , c'est une application de classe  $C^1$  de  $U$  dans  $E$  avec  $df_1(a) = Id_E$ .

Posons pour  $x \in U$ ,  $\psi(x) = x - f_1(x)$ , on a que  $\psi$  est de classe  $C^1$  sur  $U$  et  $d\psi(a) = 0$ , il existe donc un voisinage ouvert convexe  $W_1 \subset U$  de  $a$  tel que

$$\|d\psi(x)\| \leq K < 1, \quad \forall x \in W_1,$$

alors  $\psi$  est  $K$ -Lipschitzienne dans  $W_1$  selon le théorème des accroissements finis, c'est-à-dire une contraction de constante de contraction  $K < 1$ .

### 2eme étape

Nous démontrons que  $f_1$  est un homéomorphisme d'un voisinage ouvert de  $a$  sur un voisinage ouvert de  $f_1(a)$ .

En effet, pour  $x, y \in W_1$ , on a

$$x - y = f_1(x) - f_1(y) + \psi(x) - \psi(y),$$

donc

$$\|x - y\| \leq \|f_1(x) - f_1(y)\| + K\|x - y\|,$$

d'où

$$\|x - y\| \leq \frac{1}{1 - K} \|f_1(x) - f_1(y)\|.$$

Ainsi  $f_1$  est injective, donc c'est une bijection de  $W_1$  sur  $f_1(W_1)$ , et  $f_1^{-1}$  est  $1/(1 - K)$ -Lipschitzienne. Il en résulte que  $f_1$  est un homéomorphisme de  $W_1$  sur  $f_1(W_1)$ . Mais  $f_1(W_1)$  n'est pas nécessairement un voisinage **ouvert** de  $f_1(a)$ . On sait seulement que l'image d'un ouvert de  $W_1$  est ouvert relativement à  $f_1(W_1)$ .

On sait que  $W_1$  contient une boule fermée  $\bar{B}(a, r)$ , montrons que  $f_1(W_1)$  contient la boule ouverte  $B(f_1(a), (1 - K)r)$ .

Soit  $y \in B(f_1(a), (1 - K)r)$  et considérons l'application  $\psi_y : W_1 \rightarrow E$  par  $\psi_y(x) = x + y - f_1(x)$ . L'application  $\psi_y$  est aussi  $K$ -Lipschitzienne, par ailleurs, si  $x \in \bar{B}(a, r)$ , on a

$$\begin{aligned} \|\psi_y(x) - a\| &\leq \|\psi_y(x) - \psi_y(a)\| + \|\psi_y(a) - a\| \\ &\leq K\|x - a\| + \|y - f_1(a)\| \\ &\leq Kr + (1 - K)r = r, \end{aligned}$$

donc  $\psi_y(x) \in \bar{B}(a, r)$  et  $\psi_y$  est alors une contraction de constante de contraction  $K$  de  $\bar{B}(a, r)$  sur elle-même. D'après le corollaire 4.1.1,  $\psi_y$  admet un point fixe  $z \in \bar{B}(a, r)$ ,

donc

$$z = \psi_y(z) = z + y - f_1(z) \text{ ou } y = f_1(z),$$

On a donc démontré tous les point de  $B(f_1(a), (1 - K)r)$  sont des images des point de  $\bar{B}(a, r)$ . En conséquence,  $B(f_1(a), (1 - K)r) \subset f_1(W_1)$ .

$W_2 = f_1^{-1}(B(f_1(a), (1 - K)r))$  est alors un voisinage ouvert de  $a$  dans  $W_1$ . On a donc démontré que  $f_1$  est un homéomorphisme de  $W_2$  sur  $B(f_1(a), (1 - K)r)$ .

### 3eme étape

On en déduit que  $f$  est un homéomorphisme de  $W_2$  dans  $df(a)(B(f_1(a), (1 - K)r))$  car  $df(a)$  est un isomorphisme. On sait déjà que  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $U$ , pour conclure, en utilisant la proposition 4.1.2, il suffit de montrer qu'il existe un voisinage ouvert  $U_1$  de  $a$  dans  $W_2$  tel que  $df(x) \in \text{Isom}(E, F)$  pour tout  $x \in U_1$ .

En effet,  $df : U \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$  est continue par hypothèse, et  $\text{Isom}(E, F)$  est un ouvert de  $\mathcal{L}(E, F)$ , l'ensemble des points  $x$  où  $df(x) \in \text{Isom}(E, F)$  est donc un ouvert  $U_1$ , contenant  $a$ . On a donc démontré le théorème d'inversion locale.

On a immédiatement deux corollaires.

**Corollaire 4.1.3.** *Soit  $f : U \rightarrow F$  une application de classe  $C^1$ , telle que  $df(x) \in \text{Isom}(E, F)$  pour tout  $x \in U$ . Alors  $f(U)$  est un ouvert.*

Le théorème d'inversion locale entraine que  $f$  est une application ouverte. Donc  $f(U)$  est un ouvert.

**Corollaire 4.1.4.** *Pour que  $f : U \rightarrow F$ , de classe  $C^1$ , soit un  $C^1$ -difféomorphisme de  $U$  sur un ouvert de  $F$ , il faut et il suffit que  $f$  soit injective et  $df(x) \in \text{Isom}(E, F)$  pour tout  $x \in U$ .*

Les deux conditions sont évidemment nécessaires. Réciproquement, supposons que les deux conditions sont remplies, en vertu du corollaire 4.1.3,  $f$  est une application ouverte, donc  $f$  est une bijection de  $U$  sur  $f(U)$ , cette bijection étant à la fois continue et ouverte est donc un homéomorphisme de  $U$  sur  $f(U)$ . D'après la proposition 4.1.2,  $f$  est un  $C^1$ -difféomorphisme.

## 4.2. Théorème des fonctions implicites

On envisage la situation suivante :  $E_1, E_2, F$  désignent trois e.v.n.,  $U$  un ouvert de  $E = E_1 \times E_2$ , et  $f : U \rightarrow F$  une application de classe  $C^1$ . Soit  $(a, b)$  un point de  $U$ , on se propose d'étudier les solutions  $(x, y)$  de l'équation :

$$f(x, y) = f(a, b)$$

qui sont "suffisamment voisines" de  $(a, b)$ .

**Théorème 4.2.1.** (Théorème des fonctions implicites)

*Soient  $f : U \subset E_1 \times E_2 \rightarrow F$  une application de classe  $C^1$ , et  $(a, b)$  un point de  $U$ . On suppose que  $d_2f(a, b) \in \text{Isom}(E_2, F)$ . Alors, il existe un voisinage ouvert  $W$  de  $a$  dans  $E_1$ , un voisinage ouvert  $V$  de  $(a, b)$  dans  $E_1 \times E_2$  et une application  $g : W \rightarrow E_2$  de classe  $C^1$  tels que pour tout  $(x, y) \in U$ , on ait  $(x, y) \in V$  et  $f(x, y) = f(a, b)$  SSI  $x \in W$  et  $g(x) = y$ . En particulier, pour tout  $x \in W$ , on a  $f(x, g(x)) = f(a, b)$ .*

**Remarque :** On a nécessairement  $\dim E_2 = \dim F$ .

**Démonstration :** Ce théorème est un corollaire standard du théorème d'inversion locale. En effet, si on considère l'application

$$H : U \rightarrow E_1 \times F, \quad H(x, y) = (x, f(x, y)).$$

$H$  est de classe  $C^1$  et pour la matrice jacobienne de  $dH(a, b)$ , on a

$$\begin{pmatrix} \text{Id}_{E_1} & 0 \\ d_1f(a, b) & d_2f(a, b) \end{pmatrix}.$$

Ainsi  $dH(a, b) \in \mathcal{L}(E_1 \times E_2, E_1 \times F)$ , avec  $dH(a, b)(h, k) = (h, d_1f(a, b)(h) + d_2f(a, b)(k))$ . Il est clair que  $dH(a, b) \in \text{Isom}(E_1 \times E_2, E_1 \times F)$ , l'isomorphisme réciproque étant  $E_1 \times F \rightarrow E_1 \times E_2$  défini par

$$(h', k') \rightarrow (h', (d_2f(a, b))^{-1}(k' - d_1f(a, b)(h'))).$$

Donc  $H$  est un  $C^1$ -difféomorphisme local d'un voisinage ouvert  $V$  de  $(a, b)$  contenu dans  $U$  sur un voisinage ouvert  $H(V)$  de  $(a, f(a, b))$  dans  $E_1 \times F$ . Soit  $H^{-1}$  le difféomorphisme réciproque, on a

$$H^{-1}(x, z) = (x, g_1(x, z)), \quad \forall (x, z) \in H(V).$$

Ceci définit une fonction  $g_1 : H(V) \rightarrow E_2$  de classe  $C^1$  avec  $g_1(a, f(a, b)) = b$ , et telle que  $(x, y) \in V$  et  $f(x, y) = z$  si et seulement si  $(x, z) \in H(V)$  et  $g_1(x, z) = y$ . Fixons  $z = f(a, b)$ , l'application  $x \rightarrow (x, f(a, b))$  de  $E_1$  dans  $E_1 \times F$  est une application continue, et l'image inverse de  $h(V)$  est un ouvert  $W$  de  $E_1$  contenant  $a$ .

Si on pose  $g(x) = g_1(x, f(a, b))$  pour  $x \in W$ , alors  $g$  est de classe  $C^1$  sur  $W$ ,  $g(a) = b$ , et  $f(x, g(x)) = f(a, b)$ .

l'unicité de  $g$  donné par l'unicité de  $g_1$  (de  $h^{-1}$ ).

**Théorème 4.2.2.** *Sous les hypothèses du théorème 4.2.1, il existe un voisinage ouvert  $W$  de  $a$  dans  $E_1$  tel que*

$$dg(x) = -(d_2f(x, g(x)))^{-1} \circ d_1f(x, g(x)), \quad \forall x \in W.$$

**Démonstration :** Choisissons  $V$  suffisamment petit en sorte que  $d_2f(x, y) \in \text{Isom}(E_2, F)$  pour tout  $(x, y) \in V$ . Dans  $W$ , on a l'identité

$$f(x, g(x)) = f(a, b).$$

Donc le théorème de différentiation des applications composées donne (écriture en matrice jacobienne), sur  $W$

$$(d_1f(x, g(x)), d_2f(x, g(x))) \begin{pmatrix} \text{Id}_{E_1} \\ dg(x) \end{pmatrix} = 0,$$

donc

$$d_1f(x, g(x)) + d_2f(x, g(x)) \times dg(x) = 0,$$

d'où

$$dg(x) = -(d_2f(x, g(x)))^{-1} \circ d_1f(x, g(x)), \quad \forall x \in W.$$

**Remarques :**

(1) Ce théorème permet de calculer la différentielle de  $g$  sur  $W$  sans avoir à connaître la forme exacte de  $g$ . On obtient ainsi les dérivées partielles de  $g$  et les dérivées partielles d'ordre supérieur.

(2) Le théorème dit que dans le voisinage  $V$  de  $(a, b)$ , l'ensemble des solutions de l'équation  $f(x, y) = f(a, b)$  est exactement le graphe de  $g$ .

(3) Le théorème des fonctions implicites est équivalent au théorème d'inversion locale. On a déjà vu que le théorème d'inversion locale entraîne le théorème des fonctions implicites. L'autre implication est laissée à titre d'exercice.

### 4.3. Applications

Soient  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ ,  $f_1, f_2 : U \rightarrow \mathbb{R}$  qu'on suppose de classe  $C^1$ . Supposons qu'il existe  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $f_2(x, y) = F(f_1(x, y))$  et  $F$  de classe  $C^1$ , on a alors

$$J(f_1, f_2) = \begin{vmatrix} d_1 f_1 & d_2 f_1 \\ d_1 f_2 & d_2 f_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_1 f_1 & d_2 f_1 \\ F' d_1 f_1 & F' d_2 f_1 \end{vmatrix} = 0.$$

La proposition suivante donne une réciproque.

**Proposition 4.3.1.** *Soient  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ ,  $f_1, f_2 : U \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$ . Supposons que  $J(f_1, f_2) = 0$  et que  $d_2 f_1(x_0, y_0) \neq 0$  pour un point  $(x_0, y_0) \in U$ . Alors il existe une fonction  $F$  définie sur un intervalle contenant  $f_1(x_0, y_0)$  telle que  $f_2(x, y) = F(f_1(x, y))$  dans un voisinage de  $(x_0, y_0)$ .*

**Démonstration :** Posons  $z_0 = f_1(x_0, y_0)$  et considérons la fonction de trois variables  $\psi(x, y, z) = f_1(x, y) - z$  qui est de classe  $C^1$ , et s'annule en  $(x_0, y_0, z_0)$  et  $d_2 \psi(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ . D'après le théorème des fonctions implicites, il existe un voisinage de  $(x_0, z_0)$ , et une fonction  $g(x, z)$  tels que  $\psi(x, g(x, z), z) = 0$  et  $g(x_0, z_0) = y_0$ . on a aussi

$$d_1 g(x, z) = -\frac{d_1 \psi(x, g(x, y), z)}{d_2 \psi(x, g(x, y), z)} = -\frac{d_1 f_1(x, y)}{d_2 f_1(x, y)}.$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f_2(x, g(x, z)) &= d_1 f_2(x, g(x, z)) + d_2 f_2(x, g(x, z)) d_1 g(x, z) \\ &= d_1 f_2 - \frac{d_2 f_2 d_1 f_1}{d_2 f_1} = -\frac{1}{d_2 f_1} J(f_1, f_2) = 0. \end{aligned}$$

Donc  $f_2(x, g(x, z))$  est une fonction qui ne dépend que de la variable  $z$ , i. e. dans un voisinage  $|x - x_0| \leq \delta, |z - z_0| \leq \delta$ , il existe une fonction  $F$  de classe  $C^1$  telle que  $f_2(x, g(x, z)) = F(z)$ . Mais les équations  $f_1(x, y) - z = 0$  et  $g(x, z) = y$  sont équivalentes dans un voisinage de  $(x_0, y_0, z_0)$ . On a donc  $g(x, f_1(x, y)) = y$ . Ceci implique  $f_2(x, y) = F(f_1(x, y))$  dans un voisinage de  $(x_0, y_0)$ .

#### Zéros simples de polynômes

On considère l'application  $H : \mathbb{R}_k(X) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $H(P, \lambda) = P(\lambda)$  où  $\mathbb{R}_k(X)$  est l'espace de polynômes de degré  $\leq k$ .  $H$  est de classe  $C^1$  et

$$d_1 H(P_0, \lambda_0)(P) = P(\lambda_0), \quad d_2 H(P_0, \lambda_0)(\lambda) = P_0'(\lambda_0) \lambda,$$

pour tous  $(P_0, \lambda_0)$  et  $(P, \lambda) \in \mathbb{R}_k \times \mathbb{R}$ .

Si  $\lambda_0$  est un zéro simple de  $P_0$ , alors  $H(P_0, \lambda_0) = P_0(\lambda_0) = 0$  et  $d_2 H(P_0, \lambda_0) = P_0'(\lambda_0) \neq 0$ .

D'après le théorème des fonctions implicites, il existe un voisinage ouvert  $W$  de  $P_0$  dans  $\mathbb{R}_k(X)$ , un nombre  $\varepsilon > 0$  et une unique application de classe  $C^1$

$$\lambda : W \rightarrow ]\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon[,$$

tels que  $H(P, \lambda(P)) = H(P_0, \lambda_0) = 0$  pour tous  $P \in W$ . i. e.  $\lambda(P)$  est le seul zéro de  $P$  contenu dans l'intervalle  $] \lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon [$ , en particulier  $\lambda(P_0) = \lambda_0$ .

De plus, l'application  $P \rightarrow P'(\lambda(P))$  étant continue, on peut supposer  $W$  et  $\varepsilon$  assez petits pour qu'on ait  $P'(\lambda(P)) \neq 0$  pour tout  $P \in W$ , ce qui exprime que  $\lambda(P)$  est un zéro simple de  $P$ .

En conclusion, si  $\lambda_0$  est un zéro simple de  $P_0$ , alors il existe un voisinage ouvert  $W$  de  $P_0$  dans  $\mathbb{R}_k(X)$ , un voisinage  $] \lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon [$  de  $\lambda_0$  tels que chaque polynôme  $P \in W$  possède un seul zéro, simple, dans  $] \lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon [$ .