Estimations de Strichartz généralisées sur le groupe de Heisenberg

H. Bahouri & P. Gérard & C.-J. Xu

1 Notations et résultats

On se propose dans cet exposé d'établir des estimations de Strichartz généralisées pour l'équation des ondes sur le groupe de Heisenberg.

Ce type d'estimations pour l'équation des ondes sur $\mathbf{R}^n$ a une longue histoire commençant avec l'article de Segal [14], et a porté le nom d'estimations de Strichartz après l'article fondamental de Strichartz [15]. Ces estimations ont été généralisées par plusieurs auteurs et exploitées pour étudier le problème de Cauchy et la théorie de la diffusion de l'équation des ondes non linéaire (pour une bibliographie détaillée, voir Ginibre et Velo [6]).

La preuve de ces estimations (voir [6]) est basée sur trois types d'ingrédients: le premier consiste en des estimations spécifiques, et en particulier des estimations de la phase stationnaire sur le groupe d'évolution associé à l'équation homogène. Le second repose sur les découpages dyadiques et les espaces de Besov. Enfin, le troisième utilise des arguments abstraits de dualité et d'interpolation. La démarche que nous allons adopter dans ce travail comprend également ces trois étapes.

Le groupe de Heisenberg $\mathbf{H}_n$ est l'ensemble

$$\mathbf{C}^n \times \mathbf{R} = \{[z,s]; z \in \mathbf{C}^n, s \in \mathbf{R}\},$$

muni de la loi de multiplication

$$[z,s]\cdot[z',s'] = [z+z', s+s'+2\mathrm{Im}\, z\cdot\bar{z}'],$$

ainsi $\mathbf{H}_n$ est un groupe non commutatif. En utilisant le système de coordonnées réelles (x,y,s) obtenu à partir de $z_j = x_j + iy_j$, le système de champs de vecteurs réels invariants à gauche sur le groupe $\mathbf{H}_n$:

$$X_j = \partial_{x_j} + 2y_j\partial_s;\ Y_j = \partial_{y_j} - 2x_j\partial_s;\ j = 1,\cdots,n$$

est un système générateurs de l'algèbre de Lie du Groupe $\mathbf{H}_n$. La dimension homogène de $\mathbf{H}_n$ est $N = 2n+2$ (voir [12]). En posant

$$\dot{H}^1(\mathbf{H}_n) = \{X_j f, Y_j f \in L^2(\mathbf{H}_n), j = 1,\cdots,n\},$$

dans [12, 3], est démontrée l'inclusion de Sobolev suivante

$$\dot{H}^1(\mathbf{H}_n) \subset L^{2N/(N-2)}(\mathbf{H}_n).$$

On considère maintenant le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \triangle_{\mathbf{H}_n} u = f \\ u|_{t=0} = u_0 \\ \partial_t u|_{t=0} = u_1 \end{cases} \tag{1}$$

où

$$\triangle_{\mathbf{H}_n} = \sum_{j=1}^{n}(X_j^2 + Y_j^2).$$

Le résultat principal de ce travail est l'estimation suivante que nous appellerons "estimation de Strichartz généralisée sur le groupe de Heisenberg".

Théorème 1 *Soit u une solution de problème (1), étant donnés $q \in [\frac{2N}{N-2}, \frac{2(2N-1)}{2N-5}]$ et p avec*

$$\frac{1}{p} + \frac{N}{q} = \frac{N}{2} - 1.$$

Alors il existe $C_q > 0$ tel que, pour tout $T > 0$

$$\|u\|_{L^p([0,T];L^q(\mathbf{H}_n))} \leq C_q\{\|f\|_{L^1([0,T];L^2(\mathbf{H}_n))} + E_0(u)^{1/2}\}, \tag{2}$$

où

$$E_0(u) = \sum_{j=1}^{n}(\|X_j u(0,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbf{H}_n)} + \|Y_j u(0,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbf{H}_n)}) + \|\partial_t u(0,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbf{H}_n)}.$$

Nous allons d'abord développer une théorie de décomposition dyadique sur $\mathbf{H}_n$. En d'autres termes, nous construisons une fonction radiale $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{H}_n)$, et pour $f \in \mathcal{S}'(\mathbf{H}_n)$, on pose

$$\dot{\triangle}_j f = f * \varphi_j,$$

où $*$ est la convolution sur le groupe $\mathbf{H}_n$, $\varphi_j(z,s) = 2^{Nj}\varphi(2^j z, 2^{2j}s)$, et $\sum_j \varphi_j = \delta_0$ où δ_0 est la masse de Dirac en 0.

Pour $\rho \in \mathbf{R}$, et $1 \leq p, r \leq +\infty$, $\dot{B}^{\rho}_{p,r}(\mathbf{H}_n)$ est l'espace de distributions tempérées sur $\mathbf{H}_n$ vérifiant

$$\|u\|_{\dot{B}^{\rho}_{p,r}(\mathbf{H}_n)} = \left(\sum_{j\in\mathbf{Z}} 2^{jr\rho}\|\dot{\triangle}_j u\|^r_{L^p(\mathbf{H}_n)}\right)^{1/r} < +\infty.$$

Pour la décroissance des solutions du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t^2 v - \triangle_{\mathbf{H}_n} v = 0 \\ v|_{t=0} = u_0 \\ \partial_t v|_{t=0} = u_1 \end{cases},$$

on démontre le théorème suivant.

Théorème 2 *i) Supposons que $u_1, X_j u_0, Y_j u_0 \in L^{\bar{p}}(\mathbf{H}_n), j = 1, \cdots, n$;*

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2N-1}, \quad \frac{1}{\bar{p}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2N-1}.$$

Alors il existe $C > 0$ tel que

$$\|v(t)\|_{L^p(\mathbf{H}_n)} \leq C(1+|t|)^{-1/(2N-1)}\left\{\sum_{j=1}^{n}\{\|X_j u_0\|_{L^{\bar{p}}(\mathbf{H}_n)} + \|Y_j u_0\|_{L^{\bar{p}}(\mathbf{H}_n)}\} + \|u_1\|_{L^{\bar{p}}(\mathbf{H}_n)}\right\}. \tag{3}$$

ii) Supposons que $u_0 \in \dot{B}^{N-1/2}_{1,1}(\mathbf{H}_n), u_1 \in \dot{B}^{N-1/2-1}_{1,1}(\mathbf{H}_n)$. Alors il existe $C > 0$ tel que

$$\|v(t)\|_{L^\infty(\mathbf{H}_n)} \leq C(1+|t|)^{-1/2}\left\{\|u_0\|_{\dot{B}^{N-1/2}_{1,1}(\mathbf{H}_n)} + \|u_1\|_{\dot{B}^{N-1/2-1}_{1,1}(\mathbf{H}_n)}\right\}. \tag{4}$$

Une conséquence de (4) est que, par exemple, si $u_0, u_1 \in \mathcal{S}(\mathbf{H}_n)$, alors

$$\|v(t)\|_{L^\infty(\mathbf{H}_n)} \leq C(1+|t|)^{-1/2}.$$

On peut de plus montrer par un exemple explicite que cette décroissance est optimale. Notons que cet exposant de décroissance ne dépend pas de la dimension N, contrairement au cas du Laplacien usuel sur $\mathbf{R}^n$.

Signalons enfin que les travaux présentés ici feront l'objet d'une publication ultérieure plus détaillée [1].

2 Théorie de Littlewood-Paley sur le groupe de Heisenberg

On rappelle brièvement quelques résultats concernant la transformation de Fourier sur le groupe de Heisenberg, pour le détail voir [9, 16].

Le groupe $\mathbf{H}_n$ étant non commutatif, la transformation de Fourier sur $\mathbf{H}_n$ s'appuie sur les représentations irréductibles unitaires de $\mathbf{H}_n$. Pour tout $\lambda \neq 0$, considerons l'espace de Hilbert défini par

$$\mathcal{H}_\lambda = \{F;\ \text{holomorphe sur } \mathbf{C}^n, \|F\|_{\mathcal{H}_\lambda} < \infty\},$$

où

$$\|F\|^2_{\mathcal{H}_\lambda} = \left(\frac{2|\lambda|}{\pi}\right)^n \int_{\mathbf{C}^n} e^{-2|\lambda||\xi|^2} |F(\xi)|^2 d\xi.$$

On définit alors une représentation unitaire u^λ de $\mathbf{H}_n$ dans $U(\mathcal{H}_\lambda)$ par la formule

$$\begin{aligned} u^\lambda_{z,s}F(\xi) &= F(\xi - \bar{z})e^{i\lambda s + 2\lambda(\xi\cdot z - |z|^2/2)}, \quad \text{si } \lambda > 0; \\ u^\lambda_{z,s}F(\xi) &= F(\xi + z)e^{i\lambda s + 2\lambda(\xi\cdot \bar{z} - |z|^2/2)}, \quad \text{si } \lambda < 0. \end{aligned}$$

On montre que la famille $(u^\lambda)_{\lambda\neq 0}$ donne, à isomorphisme près, toutes les représentations irréductibles unitaires de $\mathbf{H}_n$ (voir [16]).

Par ailleurs, notons que les monômes

$$F_{\alpha,\lambda}(\xi) = \frac{(\sqrt{2|\lambda|}\xi)^\alpha}{\sqrt{\alpha!}}; \quad \alpha \in (\mathbf{Z}^+)^n,$$

forment une base orthonormée de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_\lambda$.

Définition 1 *Pour $f \in L^1(\mathbf{H}_n)$, on pose*

$$\hat{f}(\lambda) = \mathcal{F}(f)(\lambda) = \int_{\mathbf{H}_n} f(w) u^\lambda_w dw.$$

La fonction $\hat{f}$ à valeurs dans les opérateurs bornés sur $\mathcal{H}_\lambda$ est par définition la transformée de Fourier de f.

On a les formules suivantes:

$$\mathcal{F}(\triangle_{\mathbf{H}_n} f)(\lambda)F_{\alpha,\lambda} = -4|\lambda|(2|\alpha|+n)\hat{f}(\lambda)F_{\alpha,\lambda},$$

et

$$\mathcal{F}(f * g)(\lambda) = \mathcal{F}(f)(\lambda) \circ \mathcal{F}(g)(\lambda).$$

Pour $f \in L^1 \bigcap L^2(\mathbf{H}_n)$ on a la formule de Plancherel

$$\|f\|^2_{L^2(\mathbf{H}_n)} = \frac{2^{n-1}}{\pi^{n+1}} \sum_{\alpha \in (\mathbf{Z}^+)^n} \int_{-\infty}^{\infty} \|\hat{f}(\lambda) F_{\alpha,\lambda}\|^2_{\mathcal{H}_\lambda} |\lambda|^n d\lambda = \frac{2^{n-1}}{\pi^{n+1}} \int_{-\infty}^{\infty} \|\hat{f}(\lambda)\|^2_{HS(\mathcal{H}_\lambda)} |\lambda|^n d\lambda. \quad (5)$$

On s'intéresse maintenant à l'étude de la transformée de Fourier des fonctions radiales de la forme

$$f(z,s) = g(|z|, s).$$

Soit $f \in L^1(\mathbf{H}_n)$ une fonction radiale, on a

$$\hat{f}(\lambda) F_{\alpha,\lambda} = R_{|\alpha|}(\lambda) F_{\alpha,\lambda}$$

où

$$R_m(\lambda) = \left(\begin{array}{c} m+n-1 \\ m \end{array} \right)^{-1} \int f(z,s) e^{i\lambda s} L_m^{(n-1)}(2|\lambda||z|^2) e^{-|\lambda||z|^2} dz ds,$$

les $L_m^{(p)}(t)$ étant les polynômes de Laguerre définis par

$$L_m^{(p)}(t) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \left(\begin{array}{c} m+p \\ m-k \end{array} \right) \frac{t^k}{k!}. \quad t \geq 0.$$

Réciproquement, si les scalaires $R_m(\lambda), m \in \mathbf{N}, \lambda \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ satisfaisant à

$$\sum_m \left(\begin{array}{c} m+n-1 \\ m \end{array} \right) \int |R_m(\lambda)| |\lambda|^n d\lambda < \infty,$$

et on pose

$$f(z,s) = \frac{2^{n-1}}{\pi^{n+1}} \sum_m \int e^{-i\lambda s} R_m(\lambda) L_m^{(n-1)}(2|\lambda||z|^2) e^{-|\lambda||z|^2} |\lambda|^n d\lambda.$$

On a alors

$$\hat{f}(\lambda) F_{\alpha,\lambda} = R_{|\alpha|}(\lambda) F_{\alpha,\lambda},$$

et Nous prenons maintenant une fonction particulière $R^* \in C_0^\infty(C_0)$, où $C_0 = \{\tau \in \mathbf{R};\ 1/2 \leq |\tau| \leq 4\}$ et définissons $R_m^*(\tau) = R^*((2m+n)\tau)$, donc $R_m^* \in C_0^\infty(C_m^*)$ avec $C_m^* = \{\tau \in \mathbf{R};\ 1/2(2m+n)^{-1} \leq |\tau| \leq 4(2m+n)^{-1}\}$. Comme dans [2, 4], on peut choisir R^* vérifiant,

$$\sum_{j \in \mathbf{Z}} R_m^*(2^{-2j}\tau) = 1, \ \text{ pour tout } \ m \in \mathbf{N}, \tau \in \mathbf{R} \setminus \{0\}.$$

Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} & \sum_m \left(\begin{array}{c} m+n-1 \\ m \end{array} \right) \int_{-\infty}^{\infty} |R_m^*(\tau)| |\tau|^n d\tau \\ = \ & \sum_m \frac{(m+n-1)!}{m!(n-1)!} (2m+n)^{-n-1} \int_{C_0} |R^*(\lambda)| |\lambda|^n d\lambda < \infty. \end{aligned}$$

Il existe donc une fonction radiale φ sur le groupe de Heisenberg satisfaisant à

$$\hat{\varphi}(\lambda) F_{\alpha,\lambda} = R^*_{|\alpha|}(\lambda) F_{\alpha,\lambda},$$

et

$$\varphi(z,s) = \frac{2^{n-1}}{\pi^{n+1}} \sum_m \int e^{-i\lambda s} R_m^*(\lambda) L_m^{(n-1)}(2|\lambda||z|^2) e^{-|\lambda||z|^2} |\lambda|^n d\lambda; \quad (6)$$

Lemme 1 *On a*

$$\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{H}_n); \qquad \int \varphi ds = 0.$$

La démonstration de ce lemme n'est pas du tout triviale, il faut utiliser les proprietés spéciales des polynômes de Laguerre, voir [1].

On peut donc définir une famille d'opérateurs $\dot{\triangle}_j : L^2(\mathbf{H}_n) \to L^2(\mathbf{H}_n), j \in \mathbf{Z}$, par

$$\mathcal{F}(\dot{\triangle}_j f)(\lambda) F_{\alpha,\lambda} = R^*_{|\alpha|}(2^{-2j}\lambda)\hat{f}(\lambda) F_{\alpha,\lambda}.$$

Pour $f \in L^2(\mathbf{H}_n)$, la décomposition

$$f = \sum_{j\in\mathbf{Z}} \dot{\triangle}_j f$$

s'appelle décomposition de Littlewood-Paley de f sur le groupe de Heisenberg $\mathbf{H}_n$. Cette notion peut être formellement généralisée à des distributions tempérées $f \in \mathcal{S}'(\mathbf{H}_n)$.

On donne la définition des espaces de Besov homogènes comme dans [17].

Définition 2 *Soient $\rho \in \mathbf{R}$, et $1 \leq p, r \leq +\infty$ deux réels, l'espace de Besov homogène sur le groupe de Heisenberg $\dot{B}^{\rho}_{p,r}(\mathbf{H}_n)$ est l'espace de distributions tempérées vérifiant*

$$\|u\|_{\dot{B}^{\rho}_{p,r}(\mathbf{H}_n)} = \left(\sum_{j\in\mathbf{Z}} 2^{jr\rho} \|\dot{\triangle}_j u\|^r_{L^p(\mathbf{H}_n)} \right)^{1/r} < +\infty.$$

On a $L^2(\mathbf{H}_n) = B^0_{2,2}(\mathbf{H}_n)$, et le dual de $B^{\rho}_{p,r}(\mathbf{H}_n)$ est $B^{-\rho}_{\bar{p},\bar{r}}(\mathbf{H}_n)$, avec $1 = 1/p + 1/\bar{p}, 1 = 1/r + 1/\bar{r}, 1 < p < \infty, 1 < r < \infty$, et l'inclusion continue

$$\dot{B}^{\rho}_{p_1,r}(\mathbf{H}_n) \subset \dot{B}^{\rho - N(1/p_1 - 1/p_2)}_{p_2,r}(\mathbf{H}_n) \quad \text{si } p_1 \leq p_2.$$

L'espace de Besov non-homogène sur le groupe de Heisenberg $B^{\rho}_{p,r}(\mathbf{H}_n)$ peut être défini comme dans le cas classique.

On démontre aussi l'injection de Sobolev précisée sur le groupe de Heisenberg (voir [5] pour le cas classique).

Théorème 3 *Soient $1 \leq p < \infty, 0 < \rho < N/p$, on a alors l'inclusion continue suivante:*

$$\dot{B}^{\rho}_{p,p}(\mathbf{H}_n) \subset L^a(\mathbf{H}_n), \quad \text{avec } a = \frac{pN}{N - p\rho},$$

et on a aussi l'inégalité de Sobolev précisée

$$\|u\|_{L^a(\mathbf{H}_n)} \leq C \|u\|^{1-\frac{p}{a}}_{\dot{B}^{-(\frac{N}{p}-\rho)}_{\infty,\infty}} \|u\|^{\frac{p}{a}}_{\dot{B}^{\rho}_{p,p}}.$$

3 Estimations de Strichartz dans les espaces de Besov

On étudie maintenant le problème de Cauchy (1), on définit deux familles d'opérateurs U_t et A_t par

$$\mathcal{F}(U_t f)(\lambda) F_{\alpha,\lambda} = e^{ib_{|\alpha|}(\lambda)t} \hat{f}(\lambda) F_{\alpha,\lambda},$$

et

$$\mathcal{F}(A_t f)(\lambda) F_{\alpha,\lambda} = a_{|\alpha|}(\lambda, t) \hat{f}(\lambda) F_{\alpha,\lambda},$$

avec

$$b_m(\lambda) = (4|\lambda|(2m+n))^{1/2}, \quad a_m(\lambda,t) = \frac{\sin(b_m(\lambda)t)}{b_m(\lambda)}.$$

On en déduit que l'opérateur $\frac{dA_t}{dt}$ est défini par

$$\mathcal{F}(\frac{dA_t}{dt}f)(\lambda)F_{\alpha,\lambda} = \cos(b_{|\alpha|}(\lambda)t)\hat{f}(\lambda)F_{\alpha,\lambda}.$$

En utilisant la formule de Plancherel (5), on a que U_t est une isométrie sur $L^2(\mathbf{H}_n)$, A_t est un opérateur continu de $L^2(\mathbf{H}_n)$ dans $\dot{H}^1(\mathbf{H}_n)$, et $\frac{dA_t}{dt}$ est continu de $L^2(\mathbf{H}_n)$ dans $L^2(\mathbf{H}_n)$. On a aussi $A_0 = 0$, $\frac{dA}{dt}|_{t=0} = I$ et $[A_t, \triangle_{\mathbf{H}_n}] = 0$, $[\frac{dA_t}{dt}, \triangle_{\mathbf{H}_n}] = 0$.

De plus, la solution du problème (1) est de la forme $u = v + w$, où v est la solution de l'équation homogène avec les mêmes données initiales,

$$\begin{cases} \partial_t^2 v - \triangle_{\mathbf{H}_n} v = 0 \\ v|_{t=0} = u_0 \\ \partial_t v|_{t=0} = u_1 \end{cases},$$

et w la solution de l'équation non homogène avec des données de Cauchy nulles,

$$\begin{cases} \partial_t^2 w - \triangle_{\mathbf{H}_n} w = f \\ w|_{t=0} = 0 \\ \partial_t w|_{t=0} = 0 \end{cases}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} v(t,\cdot) &= \frac{dA_t}{dt}u_0 + A_t u_1; && (7) \\ \partial_t v(t,\cdot) &= A_t \triangle_{\mathbf{H}_n} u_0 + \frac{dA_t}{dt}u_1; \\ w(t,\cdot) &= \int_0^t A_{t-t'} f(t',\cdot)dt'; && (8) \\ \partial_t w(t,\cdot) &= \int_0^t \frac{dA_{t-t'}}{dt} f(t',\cdot)dt'. \end{aligned}$$

Par ailleurs, L étant un des opérateurs précédents, on définit les opérateurs retardés et avancés de L par

$$L_R(t) = \chi_+(t)L(t), \quad L_A(t) = \chi_-(t)L(t),$$

où $\chi_\pm$ étant la fonction caractéristique de $\mathbf{R}_\pm$ en temps. On peut alors écrire

$$\begin{aligned} w(t,\cdot) &= (A_R *_t \chi_+ f)(t), \\ \partial_t w(t,\cdot) &= ((\frac{dA_t}{dt})_R *_t \chi_+ f)(t), \end{aligned}$$

où $*_t$ est la convolution sur $\mathbf{R}_t$.

La donnée initiale (u_0, u_1) du problème (1) sera précisée dans l'espace

$$Y^1 = \dot{H}^1(\mathbf{H}_n) \bigoplus L^2(\mathbf{H}_n),$$

Maintenant pour $N = 2n+2$ et $2 \le r \le \infty$, on définit les indices suivants:

$$\alpha(r) = \frac{1}{2} - \frac{1}{r}, \quad \beta(r) = (N - \frac{1}{2})\alpha(r), \quad \delta(r) = N\alpha(r).$$

et l'indice de Hölder $\bar{r}$ associé à r défini par

$$\frac{1}{r}+\frac{1}{\bar{r}}=1$$

Pour les espaces de Besov $\dot{B}^{\rho}_{r,2}(\mathbf{H}_n)$, on note simplement $\dot{B}^{\rho}_{r}(\mathbf{H}_n)$. On va démontrer les estimations de Strichartz généralisées suivantes.

Proposition 1 *Soient $\rho_1,\rho_2\in\mathbf{R}$, et $2\le q_1/2, q_2/2, r_1, r_2\le\infty$, et supposons que les conditions suivantes sont satisfaites*

$$\begin{aligned}
&0\le\frac{2}{q_i}\le\alpha(r_i),\quad \text{pour } i=1,2;\\
&\rho_1+\delta(r_1)-\frac{1}{q_1}=1;\\
&\rho_2+\delta(r_2)-\frac{1}{q_2}=0.
\end{aligned}$$

1) Soit $(u_0,u_1)\in Y^1$, alors pour tout intervalle $I\subset\mathbf{R}$, v définie par (7) satisfait à l'estimation

$$\|v;L^{q_1}(I,\dot{B}^{\rho_1}_{r_1}(\mathbf{H}_n))\|+\|\partial_t v;L^{q_1}(I,\dot{B}^{\rho_1-1}_{r_1}(\mathbf{H}_n))\|\le C\|(u_0,u_1);Y^1\|.$$

2) Pour tout intervalle $I=[0,T[, 0<T\le\infty$, la fonction $w=A_R *_t \chi_+ f$ définie par (8) satisfait à l'estimation

$$\|w;L^{q_1}(I,\dot{B}^{\rho_1}_{r_1}(\mathbf{H}_n))\|+\|\partial_t w;L^{q_1}(I,\dot{B}^{\rho_1-1}_{r_1}(\mathbf{H}_n))\|\le C(\|f;L^{\bar{q}_2}(I,\dot{B}^{-\rho_2}_{\bar{r}_2}(\mathbf{H}_n))\|).$$

Les constantes C dans 1) et 2) étant indépendantes de I.

Preuve du théorème 1 à partir de la proposition 1

Soit u la solution du problème (1), alors $u=v+w$, avec v est w les fonctions définies par (7) et (8).

Si $0\le\rho_1<N/r_1, 2\le q, r_2$, l'inégalité de Sobolev et la partie 1) de la propsition 1 donnent

$$\|v;L^{q_1}(I;L^{q}(\mathbf{H}_n))\|\le C\|v;L^{q_1}(I;\dot{B}^{\rho_1}_{r_1}(\mathbf{H}_n))\|\le CE_0(u,0)^{1/2},$$

avec $q=(r_1N)/(N-r_1\rho_1)$ et $1/q_1+N/q=N/2-1$. Prenons encore $2/q_1=\alpha(r_1)=1/2-1/r_1$ et r_1 tel que

$$0\le\rho_1=1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{r_1}\right)-N\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{r_1}\right)<\frac{N}{r_1},$$

c'est-à-dire (remarquons qu'on a toujours $N\ge 4$)

$$2\le r_1\le\frac{2(2N-1)}{2N-5},$$

on a donc démontré (2) pour v avec

$$\frac{2N}{N-2}\le q=\frac{r_1N}{N-r_1\rho_1}\le\frac{2(2N-1)}{2N-5}.$$

Dans le cas classique sur $\mathbf{R}^n$ pour le Laplacien usuel, l'inégalité a lieu pour

$$\frac{2n}{n-2} \leq q = \frac{r_1 n}{n - r_1\rho_1} \leq \frac{2(n+1)}{n-3}.$$

Donc on a une perte de l'indice.

Pour $w = A_R *_t \chi_+ f$, on utilise la partie 2) de la proposition 1 avec les mêmes conditions pour les indices ρ_1, q_1, r_1, et choisissons maintenant $q_2 = \infty, r_2 = 2, \rho_2 = 0$, on a, en utilisant l'inclusion de Sobolev,

$$\begin{aligned} \|w; L^{q_1}(I; L^q(\mathbf{H}_n))\| &\leq C\|w; L^{q_1}(I; \dot{B}^{\rho_1}_{r_1}(\mathbf{H}_n))\| \\ &\leq C\|f; L^1(I; L^2(\mathbf{H}_n))\|, \end{aligned}$$

d'où l'estimation (2) pour la fonction w. On a donc démontré le théorème 1.

Le théorème 2 resulte du lemme suivant, qui nous sera également utile pour établir la proposition 1.

Lemme 2 *Pour la fonction φ définie par (6) et la famille d'opérateurs U_t, on a l'estimation suivante:*

$$\sup_{(z,s)\in\mathbf{H}_n} |U_t\varphi(z,s)| \leq C_n \min\{1,\ |t|^{-1/2}\}.$$

Pour démontrer ce lemme, on a besoin de l'estimation de la phase stationnaire suivant (voir [13]).

Lemme 3 *Soient $a \in C^1_0(\mathbf{R})$ et b une fonction réelle de classe C^2 définie sur un vosinage de Supp (a). . Supposons que $0 < \lambda \leq |b''(x)|$ pour $x \in$ Supp (a), alors*

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{ib(x)} a(x)dx\right| \leq C\lambda^{-1/2}\{\|a\|_{L^\infty} + \|a'\|_{L^1}\},$$

où C est une constante indépendante de a, b.

Il découle des propriétés des polynômes de Laguerre (voir [8]), que pour tout $\alpha \in \mathbf{N}$, il existe une constante C_α telle que, pour tout $y \geq 0, m \in \mathbf{N}$,

$$|L^{(\alpha)}_m(y)e^{-y/2}| + \left|y\frac{d}{dy}\left(L^{(\alpha)}_m(y)e^{-y/2}\right)\right| \leq C_\alpha m^\alpha,$$

On démontre maintenant le lemme 2, on rappelle que

$$U_t\varphi(z,s) = \frac{2^{n-1}}{\pi^{n+1}} \sum_m \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda s} e^{ib_m(\lambda)t} R^*_m(\lambda) L^{(n-1)}_m(2|\lambda||z|^2) e^{-|\lambda||z|^2} |\lambda|^n d\lambda.$$

Étudions chaque terme

$$I_m(t,z,s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda s} e^{i\sqrt{4|\lambda|(2m+n)}t} R^*_m(\lambda) L^{(n-1)}_m(2|\lambda||z|^2) e^{-|\lambda||z|^2} |\lambda|^n d\lambda.$$

En posant $\lambda(2m+n) = x$, on obtient

$$I_m(t,z,s) = \int_{C_0} e^{ig_{m,t}(x)} R^*(x) L^{(n-1)}_m\left(\frac{2|x||z|^2}{2m+n}\right) e^{-|x||z|^2/(2m+n)} \frac{|x|^n}{(2m+n)^{n+1}} dx,$$

où $g_{m,t}(x) = 2t\sqrt{|x|} - xs/(2m+n)$. On a

$$g''_{m,t}(x) = \begin{cases} -1/2tx^{-3/2}, & x > 0 \\ -1/2t(-x)^{-3/2}, & x < 0 \end{cases}.$$

Donc pour $x \in C_0 = \text{Supp } R^*$,

$$|g''_m(x)| \geq \frac{\sqrt{2}}{8}t.$$

En appliquant le lemme 3, on obtient

$$|I_m(t,z,s)| \leq C_n|t|^{-1/2}\{m^{-2}+$$
$$\int_{C_0} \left| \frac{d}{dx} \left(R^*(x) L_m^{(n-1)} \left(\frac{2|x||z|^2}{2m+n} \right) e^{-|x||z|^2/(2m+n)} \frac{|x|^n}{(2m+n)^{n+1}} \right) \right| dx\}.$$

D'autre part,

$$\left| R^{*\prime}(x) L_m^{(n-1)} \left(\frac{2|x||z|^2}{2m+n} \right) e^{-|x||z|^2/(2m+n)} |x|^n \right| \leq C_n m^{n-1},$$

et

$$\left| R^*(x) \frac{d}{dx} \left(L_m^{(n-1)} \left(\frac{2|x||z|^2}{2m+n} \right) e^{-|x||z|^2/(2m+n)} \right) |x|^n \right|$$
$$= \left| R^*(x) y \frac{d}{dy} \left(L_m^{(n-1)}(2y) e^{-y} \right) |x|^{n-1} \right|_{y = x|z|^2/(2m+n)} \leq C_n m^{n-1},$$

d'où

$$\left| \frac{d}{dx} \left(R^*(x) L_m^{(n-1)} \left(\frac{2|x||z|^2}{2m+n} \right) e^{-|x||z|^2/(2m+n)} |x|^n \right) \right| \leq C_n m^{n-1}.$$

On a donc démontré

$$|I_m(t,z,s)| \leq C_n |t|^{-1/2} m^{-2},$$

d'où

$$|U_t\varphi(z,s)| \leq C_n |t|^{-1/2} \sum_m m^{-2} = \widetilde{C}_n |t|^{-1/2}.$$

On a aussi

$$|U_t\varphi(z,s)| \leq C_n \sum_m m^{n-1}(2m+n)^{-n-1} \int_{C_0} |R^*(x)||x|^n dx = C_n,$$

d'où le lemme 2.

Preuve du théorème 2

On a d'abord

$$U_t\varphi_j(z,s) = \frac{2^{n-1}}{\pi^{n+1}} \sum_m \int_\infty^\infty e^{-i\lambda s} e^{ib_m(\lambda)t} R_m^*(2^{-2j}\lambda) L_m^{(n-1)}(2|\lambda||z|^2) e^{-|\lambda||z|^2} |\lambda|^n d\lambda.$$

En utilisant le changement de variable $\lambda' = 2^{-2j}\lambda$, on a

$$\begin{aligned} U_t\varphi_j(z,s) &= \frac{2^{n-1}}{\pi^{n+1}} \sum_m \int_\infty^\infty e^{-i\lambda'(2^{2j}s)} e^{ib_m(\lambda')2^j t} \\ &\quad \times R_m^*(\lambda') L_m^{(n-1)}(2|\lambda'||2^j z|^2) e^{-|\lambda'||2^j z|^2} |\lambda|^n 2^{2nj} 2^{2j} d\lambda \\ &= 2^{Nj} (U_{2^j t}\varphi)(2^j z, 2^{2j} s), \end{aligned}$$

d'où, grâce au lemme 2,

$$\sup_{(z,s)\in\mathbf{H}_n} |U_t\varphi_j(z,s)| \leq C_n \min\{2^{Nj},\ |t|^{-1/2}2^{j(N-1/2)}\},$$

qu'on peut l'écrire sous la forme

$$\|U_t\varphi_j\|_{L^\infty(\mathbf{H}_n)} \leq C\min\{2^{Nj},\ |t|^{-1/2}2^{j(N-1/2)}\}. \tag{9}$$

Soit à présent f une fonction suffisamment régulière sur $\mathbf{H}_n$, on a alors

$$U_t(f*\varphi_j) = (U_tf)*\varphi_j = f*(U_t\varphi_j).$$

Soit $\widetilde{\varphi}_j = \varphi_{j+1}+\varphi_j+\varphi_{j-1}$, on a

$$(U_tf)*\varphi_j = U_t(f*\varphi_j) = U_t(f*\varphi_j*\widetilde{\varphi}_j) = U_t(f*\varphi_j)*\widetilde{\varphi}_j = f*\varphi_j*(U_t\widetilde{\varphi}_j).$$

L'inégalité de Young donne

$$\|(U_tf)*\varphi_j\|_{L^\infty(\mathbf{H}_n)} \leq \|f*\varphi_j\|_{L^1(\mathbf{H}_n)}\|U_t\widetilde{\varphi}_j\|_{L^\infty(\mathbf{H}_n)}.$$

En utilisant (9) pour $\widetilde{\varphi}_j$, on en déduit

$$\|(U_tf)*\varphi_j\|_{L^\infty(\mathbf{H}_n)} \leq C\min\{2^{Nj}, |t|^{-1/2}2^{j(N-1/2)}\}\|f*\varphi_j\|_{L^1(\mathbf{H}_n)}.$$

Par ailleurs, l'opérateur U_t est unitaire sur $L^2(\mathbf{H}_n)$, on a alors

$$\|(U_tf)*\varphi_j\|_{L^2(\mathbf{H}_n)} = \|U_t(f*\varphi_j)\|_{L^2(\mathbf{H}_n)} = \|f*\varphi_j\|_{L^2(\mathbf{H}_n)}.$$

Interpolation entre ces deux estimations, on obtient pour $2\leq r\leq\infty$,

$$\|(U_tf)*\varphi_j\|_{L^r(\mathbf{H}_n)} \leq C\min\{2^{2j\delta(r)}, |t|^{-\alpha(r)}2^{2j\beta(r)}\}\|f*\varphi_j\|_{L^{\bar r}(\mathbf{H}_n)}.$$

En multipliant l'estimation ci-dessus par $2^{-j\beta(r)}$ et prenant la norme dans l^2, on obtient

$$\|U_tf\|_{\dot B_r^{-\beta(r)}(\mathbf{H}_n)} \leq C(1+|t|)^{-\alpha(r)}\|f\|_{\dot B_{\bar r}^{\beta(r)}(\mathbf{H}_n)}. \tag{10}$$

Posons

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2N-1},\quad \frac{1}{\bar r} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2N-1},$$

alors $r>2, \alpha(r) = 1/(2N-1)$, $\beta(r) = 1/2$, donc

$$\|U_tf\|_{\dot B_r^{-1/2}(\mathbf{H}_n)} \leq C(1+|t|)^{-1/(2N-1)}\|f\|_{\dot B_{\bar r}^{1/2}(\mathbf{H}_n)}.$$

Maintenant pour $r>2$, on a

$$\begin{aligned}\|\frac{dA_t}{dt}u_0\|_{L^r(\mathbf{H}_n)} &\leq \|\frac{dA_t}{dt}(\triangle_{\mathbf{H}_n})^{1/4}u_0\|_{\dot B_r^{-1/2}(\mathbf{H}_n)} \leq \|U_t(\triangle_{\mathbf{H}_n})^{1/4}u_0\|_{\dot B_r^{-1/2}(\mathbf{H}_n)}\\ &\leq C_n(1+|t|)^{-1/(2N-1)}\|(\triangle_{\mathbf{H}_n})^{1/4}u_0\|_{\dot B_{\bar r}^{1/2}(\mathbf{H}_n)} \leq C_n(1+|t|)^{-1/(2N-1)}\|u_0\|_{\dot B_{\bar r}^{1}(\mathbf{H}_n)}.\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\|A_tu_1\|_{L^r(\mathbf{H}_n)} &\leq \|(\triangle_{\mathbf{H}_n})^{-1/2}U_tu_1\|_{L^r(\mathbf{H}_n)} \leq \|U_t(\triangle_{\mathbf{H}_n})^{-1/4}u_1\|_{\dot B_r^{-1/2}(\mathbf{H}_n)}\\ &\leq C_n(1+|t|)^{-1/(2N-1)}\|(\triangle_{\mathbf{H}_n})^{-1/4}u_1\|_{\dot B_{\bar r}^{1/2}(\mathbf{H}_n)} \leq C_n(1+|t|)^{-1/(2N-1)}\|u_1\|_{L^{\bar r}(\mathbf{H}_n)}.\end{aligned}$$

d'où l'estimation (3).

Pour (4), on pose, dans (10) $r = +\infty, \bar{r} = 1$, donc $\alpha(r) = 1/2, \beta(r) = (2N-1)/4$, d'où

$$\|U_t f\|_{\dot{B}_\infty^{-(2N-1)/4}(\mathbf{H}_n)} \le C(1+|t|)^{-1/2}\|f\|_{\dot{B}_1^{(2N-1)/4}(\mathbf{H}_n)}.$$

Posons $f = (\triangle_{\mathbf{H}_n})^{(2N-1)/8}u_0$,

$$\|\frac{dA_t}{dt}u_0\|_{L^\infty(\mathbf{H}_n)} \le C(1+|t|)^{-1/2}\|u_0\|_{\dot{B}_1^{(2N-1)/2}(\mathbf{H}_n)},$$

et

$$\|A_t u_1\|_{L^\infty(\mathbf{H}_n)} \le \|U_t u_1\|_{\dot{B}_\infty^{-1}(\mathbf{H}_n)} \le C(1+|t|)^{-1/2}\|u_1\|_{\dot{B}_1^{(2N-1)/2-1}(\mathbf{H}_n)}.$$

D'où le théorème 2.

Preuve de la proposition 1

On suit de près Ginibre-Velo [6]. D'après les définitions de v et w et les définitions de A_t et $\frac{dA_t}{dt}$, les inégalités de la proposition 1 découlent des inégalités correspondantes sur U_t. En effet, on a

$$\|\frac{dA_t}{dt}u\|_{L^p(\mathbf{H}_n)} \le \|U_t u\|_{L^p(\mathbf{H}_n)}, \qquad \|A_t u\|_{L^p(\mathbf{H}_n)} \le \|(\triangle_{\mathbf{H}_n})^{-1/2}U_t u\|_{L^p(\mathbf{H}_n)},$$

pour tout $1 \le p \le +\infty$, et puisque ces opérateurs commutent à la décomposition de Littlewood-Paley, on a des estimations analogues avec les espaces de Besov.

De plus, l'opérateur $(\triangle_{\mathbf{H}_n})^{\delta/2}$ est un isomorphisme de $\dot{B}_r^\rho$ dans $\dot{B}_r^{\rho-\delta}$ pour tout $\rho, \delta \in \mathbf{R}$. Il suffit donc de montrer les inégalités suivantes:

$$\|U_{(\cdot)}u;\ L^{q_1}(\mathbf{R}, \dot{B}_{r_1}^{\rho_1}(\mathbf{H}_n))\| \le C\|u\|_{L^2(\mathbf{H}_n)}, \tag{11}$$

$$\|U * f;\ L^{q_1}(I, \dot{B}_{r_1}^{\rho_1}(\mathbf{H}_n))\| \le C\|f, L^{\bar{q}_2}(I, \dot{B}_{\bar{r}_2}^{-\rho_2}(\mathbf{H}_n))\|, \tag{12}$$

pour tout $I \subset \mathbf{R}$, et

$$\|U_R * f;\ L^{q_1}(I, \dot{B}_{r_1}^{\rho_1}(\mathbf{H}_n))\| \le C\|f, L^{\bar{q}_2}(I, \dot{B}_{\bar{r}_2}^{-\rho_2}(\mathbf{H}_n))\|, \tag{13}$$

pour tout $I = [0, T[\subset \mathbf{R}_+$, sous les conditions $0 \le 2/q_i \le \alpha(r_i)$ et

$$\rho_i + \delta(r_i) - \frac{1}{q_i} = 0, \quad \text{pour} \quad i = 1, 2.$$

D'autre part, si q_1 fixe, $\|\cdot;\ L^{q_1}(I, \dot{B}_{r_1}^{\rho_1}(\mathbf{H}_n))\|$ croit avec ρ_1, donc avec $1/r_1$, il suffit donc de démontrer les inégalités (11), (12) et (13) pour la valeur maximale de $1/r_1$, en autre termes, pour $\alpha(r_1) = 2/q_1$.

Si q_2 fixe, $\|\cdot;\ L^{\bar{q}_2}(I, \dot{B}_{\bar{r}_2}^{-\rho_2}(\mathbf{H}_n))\|$ décroit avec ρ_2, donc avec $1/r_2$, il suffit donc de démontrer les inégalités (12) et (13) pour la valeur maximale de $1/r_2$, en autre termes, pour $\alpha(r_2) = 2/q_2$.

Donc pour démontrer la proposition 1, il suffit de démontrer les inégalités (11), (12) et (13) pour les indices

$$\rho_i = \frac{1}{q_i} - \delta(r_i) = \frac{\alpha(r_i)}{2} - \delta(r_i) = -\beta(r_i) = (\frac{1}{2} - N)(\frac{1}{2} - \frac{1}{r_i}); \quad i = 1, 2.$$

Soit f une fonction définie sur $\mathbf{H}_n$ dépendant aussi du temps t, nous écrivons l'estimation (10) sous la forme

$$\|U_{t-t'}f(t'); \dot{B}_r^{-\beta(r)}(\mathbf{H}_n)\| \leq C(|t-t'|)^{-\alpha(r)}\|f(t'); \dot{B}_{\bar{r}}^{\beta(r)}(\mathbf{H}_n)\|.$$

Soit $0 \leq \frac{2}{q} = \alpha(r)$, et soit $I \subset \mathbf{R}$ un intervalle, en intégrant par rapport à t', prenant la norme L^q en temps t, on obtient,

$$\|U_{(R)} *_t f; L^q(I, \dot{B}_r^{-\beta(r)}(\mathbf{H}_n))\| \leq C\| \int_0^t (|t-t'|)^{-\alpha(r)}\|f(t')\|_{\dot{B}_{\bar{r}}^{\beta(r)}(\mathbf{H}_n)} dt'\|_{L^q(I)}.$$

Par l'inégalité de Hardy-Littlewood-Sobolev en temps ([7], p. 117),

$$\| \int_0^t |t-t'|^{-\alpha(r)}\|f(t')\|_{\dot{B}_{\bar{r}}^{\beta(r)}(\mathbf{H}_n)} dt'\|_{L^q(I)}. \leq C\|f; L^{\bar{q}}(I, \dot{B}_{\bar{r}}^{\beta(r)}(\mathbf{H}_n))\|,$$

car qu'on a à ici $1/q + 1 = \alpha(r) + 1/\bar{q}$. On a donc démontré

$$\|U_{(R)} *_t f; L^q(I, \dot{B}_r^{-\beta(r)}(\mathbf{H}_n))\| \leq C\|f; L^{\bar{q}}(I, \dot{B}_{\bar{r}}^{\beta(r)}(\mathbf{H}_n))\|, \tag{14}$$

où $U_{(R)}$ désigne U ou U_R. Maintenant dans le cas retardé ou non, l'estimation (14) correspond au cas diagonal ($q_1 = q_2, r_1 = r_2$) du cas limite $2/q_i = \alpha(r_i)$, i. e. $\rho_i = -\beta(r_i)$. Pour le cas en dehors de diagonal, on utilise l'argument arbitraire de dualité comme dans [6, 18], voir le détail de démonstration dans [1]. On a donc démontré la proposition 1.

Références

[1] H. Bahouri, P. Gérard et C.-J. Xu, Espaces de Besov et estimations de Strichartz généralisées sur le groupe de Heisenberg, *en préparation*

[2] J.-M. Bony, Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires, *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.,* **14** (1981), 209–246.

[3] J.-Y. Chemin et C.-J. Xu, Inclusion de Sobolev en calcul de Weyl-Hörmander et champs de vecteurs sous-elliptiques, *Annales de l'École Normale supérieure* (1998).

[4] R. R. Coifman et Y. Meyer, Au-delà des opérateurs pseudo-différentiels, Astérisque, 57, (1978).

[5] P. Gérard, Y. Meyer et F. Oru, Inégalités de Sobolev précisées, *Séminaie de EDP, Ecole Polytechnique*, exposé 4 (1996).

[6] J. Ginibre et G. Velo, Generalized Strichartz inequatities for the wave equations, *J. Functional Analysis*, **133** (1995), 50–68.

[7] L. Hörmander, The analysis of linear partial differential operators, I, Springer, Berlin, 1983.

[8] W. Magnus, F. Oberhettinger, F. G. Tricomi, Higher transcendental functions, Vol II, New York, Mcgraw-Hill Book Company, 1953.

[9] A. I. Nachman, T he wave equation on the Heisenberg group, *Comm. PDE*, **7** (1982), 675–714.

[10] M. M. Nessibi & K. Trimeche, Inversion of the Radon transform on the Laguerre hypergroup by using generalized wavelets, *J. Math. Anal. Appl.*, **208** (1997), 337–363.

[11] H. Pecher, Nonlinear small data scattering for the wave and Klein-Gordon equations, *Math. Z.*, **185** (1984), 261–270.

[12] L. Rothschild et E. Stein, Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups, *Acta Mathematica*, **137**(1977), 247–320.

[13] E. M. Stein, Oscillaroty integrals in Fourier analysis, Beijing lectures in harmonic analysis, Princeton University Press, 1986, 307–355.

[14] I. E. Segal, Space-time decay for solutions of wave equations, *Adv. Math.*, **22** (1976), 304–311.

[15] R. S. Strichartz, Restriction of Fourier transform to quadratic surfaces and decay of solutions of wave equations, *Duke Math.*, 44 (1977), 705–774.

[16] M. E. Taylor, Noncommutative harmonic analysis, mathematical surveys and monographs, n. 22, AMS, Providence, Rhode Island, 1986

[17] H. Triebel, Theory of function spaces, Birkhäuser, Basel, 1983.

[18] K. Yajima, Existence of solutions for Schrödinger evolution equations, *Comm. Math. Phys.*, **110** (1987), 415–426.

Hajer BAHOURI
Université de Tunis, Département de Mathématiques
1060 Tunis, Tunisie

Patrick GERARD email: Patrick.Gerard@math.u-psud.fr
Université de Paris-Sud, Département de Mathématiques
91405 Orsay Cedex, France

Chao-Jiang XU email: Chao-Jiang.Xu@univ-rouen.fr
Université de Rouen, UPRES-A6085, Mathématiques
76821 Mont-Saint-Aignan, France
et
Université de Wuhan, Institut de Mathématiques
430072, Wuhan, Chine