C. R. Acad. Sci. Paris, t. 325, Série I, p. 257-260, 1997
Analyse mathématique/*Mathematical Analysis*

Remarque sur la régularité de solutions faibles d'équations elliptiques semi-linéaires

Jean-Yves CHEMIN et Chao-Jiang XU

J.-Y. C. : Analyse Numérique, Tour 55-65, 5$^{\text{e}}$ étage, BP 187,
Université Pierre-et-Marie-Curie, 4, place Jussieu, 75230 Paris CEDEX 05, France.
E-mail : chemin@ann.jussieu.fr

C.-J. X. : Analyse et Modèles Stochastiques, UPRESA 6085, Université de Rouen,
76821 Mont-Saint-Aignan, France.
E-mail : Chao-Jiang.Xu@univ-rouen.fr

Résumé. Nous présentons dans cette Note une démonstration simple d'un résultat classique de régularité des solutions d'une famille de systèmes elliptiques semi-linéaires, dont un exemple est le système d'Euler-Lagrange des applications harmoniques. La méthode de démonstration repose sur l'utilisation des espaces de Besov.

Regularity of weak solutions of some semilinear elliptic systems

Abstract. *We present in this Note a simple proof of a classical result of regularity for solutions of a family of semilinear elliptic systems. An important example of such a system is the Euler-Lagrange system of harmonic maps. The method used in the proof relies on the use of Besov spaces.*

1. Énoncé des résultats

Nous allons utiliser la théorie des espaces de Besov pour donner une démonstration simple de la régularité des solutions faibles pour la classe suivante d'équations elliptiques semi-linéaires :

$$(1)\qquad \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(a_{\alpha\beta}(x)\frac{\partial u^i}{\partial x_\beta}\right) + \sum_{\alpha,\beta=1}^{n}\sum_{j,k=1}^{N} b^i_{\alpha\beta,jk}(x,u)\frac{\partial u^j}{\partial x_\alpha}\frac{\partial u^k}{\partial x_\beta} = 0, \quad i = 1,\dots,N.$$

Un cas particulier de (1) est le système d'Euler-Lagrange des applications harmoniques. Dans [2] et [3], l'existence d'une solution faible u appartenant à $H^1 \cap C^s$ avec $1/2 < s < 1$, est démontrée en utilisant le principe variationnel. Dans [6], O. Ladyzhenskaya et N. Ural'tseva ont démontré qu'une

Note présentée par Yves MEYER.

telle solution est C^∞. J. Jost (*voir* [4]) et G. Lieberman (*voir* [7]) ont revisité cette démonstration. Nous allons redémontrer ce résultat de régularité C^∞ avec une méthode différente et simple.

THÉORÈME 1. – *Soient* $\Omega \subset \mathbf{R}^n, n \geq 2$, *et* $u \in H^1_{\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbf{R}^N) \cap C^s_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ *une solution faible du système* (1) *avec* $1/2 < s < 1$. *On a alors* $u \in C^\infty$.

Pour simplifier les notations, on démontre le théorème seulement pour $N = 1$.

2. Espaces de Besov, paramultiplication et reste

Nous donnons une définition des espace de Besov par la théorie de Littlewood-Paley. Comme dans [1], il existe une partition de l'unité dyadique, c'est-à-dire deux fonctions χ et φ telles que

$$\forall \xi \in \mathbf{R}^n,\ 1 = \chi(\xi) + \sum_{q \geq 0} \varphi(2^{-q}\xi),$$

avec $\chi \in C_0^\infty(B(0, 4/3)), \varphi \in C_0^\infty(\mathcal{C}_0)$, où $\mathcal{C}_0 = \{\xi \in \mathbf{R}^n; 3/4 \leq |\xi| \leq 4/3\}$. On définit alors l'opérateur

$$\Delta_q u = \varphi(2^{-q}D)u = \mathcal{F}^{-1}(\varphi(2^{-q}\xi)\hat{u}(\xi)).$$

DÉFINITION 2. – Pour $s \in \mathbf{R}, p, r \in [1, +\infty]$, on définit l'espace de Besov $B^s_{p,r}$ par :

$$B^s_{p,r} = \{u \in \mathcal{S}'; \|\Delta_q u\|_{L^p} \leq c_q 2^{-qs},\ (c_q)_{q\in\mathbf{N}} \in \ell^r\},$$

muni de la norme $\|u\|_{B^s_{p,r}} = \|(2^{qs}\|\Delta_q u\|_{L^p})_{q\in\mathbf{N}}\|_{\ell^r}$.

Remarque. – On a $B^s_{2,2} = H^s$, l'espace de Sobolev d'indice s, et $B^\alpha_{\infty,\infty} = C^\alpha$, l'espace de Hölder d'indice α. Pour $s > n/p$, on a $B^s_{p,r} \subset L^\infty$.

Pour $u \in \mathcal{S}'$, on a la convergence dans $\mathcal{S}'$ de la série

$$u = \sum_{q=-1}^{+\infty} \Delta_q u.$$

Et pour un couple (u, v), on a formellement

$$uv = T_u v + T_v u + R(u, v)$$

avec

$$T_u v = \sum_q S_{q-1}(u) v_q = \sum_q \left(\sum_{-1 \leq q' \leq q-2} \Delta_{q'} u \right) \Delta_q v$$

et

$$R(u, v) = \sum_{|q-q'| \leq 1} \Delta_{q'} u \Delta_q v.$$

On a alors les résultats essentiels suivants :

THÉORÈME 3. – i) *Si* $u \in L^\infty$, *on a pour tout* $s \in \mathbf{R}$,

$$\|T_u v\|_{B^s_{p,r}} \leq C\|u\|_{L^\infty}\|v\|_{B^s_{p,r}}.$$

ii) *Si* $u \in B^\rho_{\infty,\infty}, \rho < 0$, *on a pour tout* $s \in \mathbf{R}$,

$$\|T_u v\|_{B^{s+\rho}_{p,r}} \leq C\|u\|_{B^\rho_{\infty,\infty}}\|v\|_{B^s_{p,r}}.$$

iii) *Pour* $s_1 + s_2 > 0, \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \leq 1, \frac{1}{r} = \min(1, \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2})$, *on a :*

$$\|R(u,v)\|_{B^{s_1+s_2}_{p,r}} \leq C\|u\|_{B^{s_1}_{p_1,r_1}} \|v\|_{B^{s_2}_{p_2,r_2}}.$$

iv) *Si* L *est un opérateur elliptique d'ordre* m, *alors pour tous* s, p, r,

$$L : B^s_{p,r} \to B^{s-2}_{p,r},$$

est un isomorphisme.

La démonstration de ce théorème se fait par simple redécoupage de séries $T_u v$ et $R(u,v)$. Nous renvoyons à [8] pour de plus amples détails.

3. Démonstration du théorème 1

Elle est basée sur le lemme suivant :

LEMME 4. – *Soit* (s,α) *un couple de réels tels que* $s \geq 2$ *et* $1/2 < \alpha < 1$. *Il existe alors une constante strictement positive* $C > 0$ *telle que, pour tout triplet de fonctions* (u,v,w) *tel que*

$$u \in B^s_{1,\infty} \cap C^\alpha\,,\ (v,w) \in \left(B^{s-1}_{1,\infty} \cap C^{\alpha-1}\right)^2,$$

on ait

$$\|u\,v\,w\|_{B^{s-2+\alpha}_{1,\infty}} \leq C\|u\|_{B^s_{1,\infty}\cap C^\alpha}\|v\|_{B^{s-1}_{1,\infty}\cap C^{\alpha-1}}\|w\|_{B^{s-1}_{1,\infty}\cap C^{\alpha-1}}.$$

Démonstration. – Pour deux fonctions u et v, on a, en utilisant le théorème 3 et le fait que $1/2 < \alpha$,

$$\|u\,v\|_{B^{s-1}_{1,\infty}\cap C^{\alpha-1}} \leq C\|u\|_{B^s_{1,\infty}\cap C^\alpha}\|v\|_{B^{s-1}_{1,\infty}\cap C^{\alpha-1}}.$$

En effet, pour

$$uv = T_u v + T_v u + R(u,v),$$

on a pour $s > 1$,

$$\begin{aligned}
\|T_u v\|_{C^{\alpha-1}} &\leq C\|u\|_{L^\infty}\|v\|_{C^{\alpha-1}} \leq C\|u\|_{C^\alpha}\|v\|_{C^{\alpha-1}},\\
\|T_v u\|_{C^{2\alpha-1}} &\leq C\|v\|_{C^{\alpha-1}}\|u\|_{C^\alpha},\\
\|R(u,v)\|_{C^{2\alpha-1}} &\leq C\|v\|_{C^{\alpha-1}}\|u\|_{C^\alpha};\\
\|T_u v\|_{B^{s-1}_{1,\infty}} &\leq C\|u\|_{C^\alpha}\|v\|_{B^{s-1}_{1,\infty}},\\
\|T_v u\|_{B^{s-1+\alpha}_{1,\infty}} &\leq C\|v\|_{C^{\alpha-1}}\|u\|_{B^s_{1,\infty}},\\
\|R(u,v)\|_{B^{s-1}_{1,\infty}} &\leq C\|u\|_{C^\alpha}\|v\|_{B^{s-1}_{1,\infty}}.
\end{aligned}$$

De ceci, l'on déduit que

$$\|uv\|_{C^{\alpha-1}} \leq C\|u\|_{C^\alpha}\|v\|_{C^{\alpha-1}}$$

et

$$\|uv\|_{B^{s-1}_{1,\infty}} \leq C\|u\|_{B^s_{1,\infty}\cap C^\alpha}\|v\|_{B^{s-1}_{1,\infty}\cap C^{\alpha-1}}.$$

Posons maintenant $A = u\,v$, et $Aw = T_A w + T_w A + R(A,w)$. Pour $s \geq 2$ et $\frac{1}{2} < \alpha < 1$, le théorème 3 implique alors que

$$\|T_A w\|_{B^{s-2+\alpha}_{1,\infty}} \leq C\|A\|_{C^{\alpha-1}}\|w\|_{B^{s-1}_{1,\infty}},$$

et que

$$\|T_w A + R(A,w)\|_{B^{s-2+\alpha}_{1,\infty}} \leq C\|A\|_{B^{s-1}_{1,\infty}}\|w\|_{C^{\alpha-1}},$$

d'où le lemme.

Prenons maintenant, sur un ouvert Ω de $\mathbf{R}^n$, l'équation suivante :

$$Pu = \sum_{i,j} b_{i,j}(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}, \tag{2}$$

où P désigne un opérateur elliptique du second ordre. Remarquons que si $u \in C^\alpha_{\mathrm{loc}} \bigcap H^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, on a alors

$$A_{i,j} \stackrel{\text{déf}}{=} a_{i,j}(u)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega).$$

Il est clair que L^1 est continûment inclus dans $B^0_{1,\infty}$. Ainsi donc, $A_{i,j}(u)$ appartient à l'espace $(B^0_{1,\infty})_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. L'équation (2) implique alors que $u \in (B^2_{1,\infty})_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ (*voir* [8]).

Nous allons maintenant démontrer que, pour tout entier $k \geq 0$, si u est une solution de (2), alors

$$u \in (B^{2+k\alpha}_{1,\infty})_{\mathrm{loc}} \cap C^\alpha_{\mathrm{loc}}(\Omega) \Rightarrow u \in (B^{2+(k+1)\alpha}_{1,\infty})_{\mathrm{loc}}(\Omega), \tag{3}$$

ce qui, par récurrence, entraînera que $u \in \bigcap_{s\geq 0}(B^s_{1,\infty})_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, donc que $u \in C^\infty$. La démonstration de (3) est très simple. D'après le théorème de paralinéarisation de Y. Meyer (*voir* [8]), l'espace $L^\infty \cap (B^s_{1,\infty})_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ est stable par composition à gauche par des fonctions C^∞. Ainsi donc, les fonctions $a_{ij}(u)$ appartiennent à $(B^{2+k\alpha}_{1,\infty})_{\mathrm{loc}} \cap C^\alpha_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Après localisation, le lemme 4, appliqué avec $s = 2 + k\alpha$, assure que

$$a_{i,j}(u)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j} \in (B^{(k+1)\alpha}_{1,\infty})_{\mathrm{loc}}(\Omega).$$

En utilisant à nouveau l'ellipticité de l'équation (2), on a $u \in (B^{2+(k+1)\alpha}_{1,\infty})_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Le théorème 1 est finalement démontré.

Note remise et acceptée le 28 avril 1997.

Références bibliographiques

[1] **Bony J.-M., 1981.** Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires, *Ann. École Norm. Sup.*, 14, p. 209-246.

[2] **Giaquinta M. et Guisti E., 1982**. On the regularity of the minima of variational integrals, *Acta Math.*, 148, p. 31-46.

[3] **Hildebrandt S., Kaul H. et Widman K., 1977**. An existence theorem for harmonic mapping of Riemannian manifolds, *Acta Math.*, 138, p. 1-16.

[4] **Jost J., 1983**. *Harmonic mappings between Riemannieam manifolds,* Proceedings of the Center of Mathematical Analysis, ANU-Press, 4.

[5] **Jost J. et Xu C.-J.** Subellpitic harmonic maps, *prépublication.*

[6] **Ladyzhenskaya O. et Uralm'tseva N.,1968**. *Linear and quasilinear elliptic equations,* Academic Press, New York.

[7] **Lieberman G., 1991**. The natural generalization of the natural conditions of Ladyzhenskaya and Ural'tseva for elliptic equations, *Commun. Partial Diff. Eq.*, 16, p. 311-361.

[8] **Meyer Y., 1991**. *Ondelettes et opérateurs*, tome 3, Herman.

[9] **Triebel H., 1978**. *Interpolation theory, function spaces, differential operators,* North Holland.