C. R. Acad. Sci. Paris, t. 330, Série I, p. 433–436, 2000
Équations aux dérivées partielles/*Partial Differential Equations*

Remarques sur les fonctions de Green associées aux opérateurs de Hörmander *

Claudy CANCELIER [a], Chao-Jiang XU [b]

[a] UPRESA 6056, Département de mathématiques et informatique, Université de Reims, B.P. 1039, 51687 Reims cedex 2, France
Courriel : claudy.cancelier@univ-reims.fr

[b] Université de Rouen, 76821 Mont-Saint-Aignan, France
Courriel : Chao-Jiang.Xu@univ-rouen.fr

(Reçu le 15 novembre 1999, accepté le 22 novembre 1999)

Résumé. Dans cette Note, on donne une démonstration des estimations jusqu'au bord des fonctions de Green associées aux opérateurs de Hörmander. © 2000 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Remarks on Green's functions associated to Hörmander's operators

Abstract. *In this Note, we prove estimates up to the boundary for Green functions associated with operators of Hörmander.* © 2000 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

1. Énoncé des résultats

Dans cette Note, on donne une nouvelle démonstration des estimations des fonctions de Green associées aux opérateurs de Hörmander. Cette méthode permet de plus d'obtenir des estimations jusqu'au bord et s'étend à des opérateurs plus généraux à coefficients non réguliers.

Soient $\widetilde{\Omega}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $X = (X_1, \ldots, X_m)$ un système de champs de vecteurs de Hörmander défini sur $\widetilde{\Omega}$, c'est-à-dire que $X_1, \ldots, X_m$ et leurs commutateurs jusqu'à un certain ordre r, engendrent l'espace tangent. On note par $\rho(x, y)$ la métrique associée à X; $\mathrm{B}(x, \delta)$ désigne la boule associée à ρ.

Soit $\Omega \Subset \widetilde{\Omega}$. Une fonction $G : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ est appelée fonction de Green associée à $H = \sum_{j=1}^m X_j^* X_j$ si $G \in \mathrm{C}^0(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \setminus \triangle)$ et si pour tout $y \in \Omega$ on a

$$HG(\,\cdot\,, y) = \delta_y, \qquad G(\,\cdot\,, y)|_{\partial\Omega} = 0.$$

L'existence de G a été démontrée dans [1]. On démontre dans cette Note les estimations suivantes :

THÉORÈME 1. – *Supposons que $\partial\Omega$ soit C^∞ et non caractéristique, alors il existe $C_1 > 0$ tel que*

$$G(x, y) \leqslant C_1 \rho(x, y)^2 \big|\mathrm{B}\big(x, \rho(x, y)\big)\big|^{-1}, \quad x, y \in \overline{\Omega}, \tag{1}$$

Note présentée par Jean-Michel BONY.

S0764-4442(00)00145-2/FLA

et, pour tout $\Omega' \Subset \Omega$, il existe $C_2 > 0$ tel que pour tout $x, y \in \Omega'$:

$$C_2 \rho(x,y)^2 \big|\mathrm{B}\big(x, \rho(x,y)\big)\big|^{-1} \leqslant G(x,y). \tag{2}$$

La démonstration de ce théorème s'étend aux opérateurs de la forme $\sum X_j^*(a_{ij} X_i \cdot)$ où (a_{ij}) est une matrice définie positive à coefficients $\mathrm{L}^\infty(\Omega)$.

2. Les lemmes préliminaires

Pour simplifier les notations, on suppose que X est générique ; $\mathcal{X}_j(x)$ désigne le sous-espace de $\mathrm{T}_x\Omega$ engendré par les commutateurs des $X_1, \ldots, X_m$ d'ordre inférieur ou égale à j, alors $Q = \sum_{j=1}^r j\big(\dim \mathcal{X}_j(x) - \dim \mathcal{X}_{j-1}(x)\big)$ est constante, et il existe $R_0 > 0,\ C > 0$, tels que :

$$\big|\mathrm{B}(x, 2R)\big| \leqslant C\big|\mathrm{B}(x,R)\big|, \quad 0 < R \leqslant R_0,\ \forall x \in \overline{\Omega}. \tag{3}$$

Pour $1 \leqslant p < +\infty$, on définit les espaces de fonctions :

$$M^{1,p}(\Omega) = \big\{ f \in \mathrm{L}^p(\Omega)\ ;\ Xf \in \mathrm{L}^p(\Omega)\big\},$$

$M_0^{1,p}(\Omega)$ la fermeture de $\mathrm{C}_0^\infty(\Omega)$ dans $M^{1,p}(\Omega)$ et $M^1(\Omega) = M^{1,2}(\Omega)$.

On a les trois inégalités suivantes (*voir* [1,3,5]) :

$$\|\varphi\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \leqslant C\|X\varphi\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}, \quad \forall \varphi \in M_0^1(\Omega)\ ; \tag{4}$$

il existe $R_0 > 0,\ C(R_0) > 0$, tels que pour tout $0 < R \leqslant R_0,\ u \in M^1(\mathrm{B}(x_0,R))$:

$$\|u - \overline{u}_R\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{B}(x_0,R))} \leqslant C(R_0) R \|Xu\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{B}(x_0,R))}\ ; \tag{5}$$

$$\|f\|_{\mathrm{L}^{2Q/(Q-2)}(\Omega)} \leqslant C\|Xf\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}, \quad \forall f \in M_0^1(\Omega), \tag{6}$$

où $\|X\varphi\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} = \big[\sum_{j=1}^m \|X_j\varphi\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)}\big]^{1/2}$.

Comme dans [7], on a le principe du maximum pour les solutions faibles.

LEMME 1. – *Soient $Q/2 < q \leqslant +\infty,\ f \in \mathrm{L}^q(\Omega)$ et $u \in M^1(\Omega)$ une solution de l'équation $Hu = f$, on a alors*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\Omega} |u| \leqslant \operatorname*{ess\,sup}_{\partial\Omega} |u| + C\|f\|_{\mathrm{L}^q(\Omega)} |\Omega|^{2/Q - 1/q}.$$

On a aussi l'inégalité de Harnack :

LEMME 2. – *Soit $u \in M^1 \cap \mathrm{L}^\infty(\Omega)$, $u \geqslant 0$, une solution de l'équation $Hu = 0$ sur Ω. Alors il existe $R_0 > 0,\ C > 0$ tels que pour tout $0 < R \leqslant R_0$ et toute boule $\mathrm{B}(x_0, 2R) \subset \Omega$:*

$$\sup_{\mathrm{B}(x_0,R)} u \leqslant C \inf_{\mathrm{B}(x_0,R)} u.$$

C'est le résultat de [1], mais pour les opérateurs de type $\sum X_j(a_{ij}(x) X_i \cdot)$; on utilise l'inégalité (6) et l'itération de Nash–Moser ; la démonstration est standard.

3. Démonstration du théorème

Pour $y \in \Omega$, et $\delta > 0$ suffisamment petit vérifiant $\mathrm{B}(y,\delta) \subset \Omega$, on étudie les solutions faibles $G_y^\delta \in M_0^1(\Omega)$ du problème suivant :

$$\left(HG_y^\delta, \varphi\right) = \fint_{\mathrm{B}(y,\delta)} \varphi(x)\,\mathrm{d}x, \quad \forall \varphi \in M_0^1(\Omega). \tag{7}$$

Rappelons que la norme de $\mathrm{L}_*^p(\Omega)$ est définie par $\|f\|_{\mathrm{L}_*^p(\Omega)} = \sup_{t>0} t|\{x \in \Omega;\ |f(x)| > t\}|^{1/p}$.

PROPOSITION 1. – *Il existe une solution faible $G_y^\delta \in M_0^1(\Omega)$ de* (7) *et elle vérifie les propriétés suivantes* :
(i) *il existe $\delta_0 > 0$ et $C > 0$ tels que pour tout $0 < \delta \leqslant \delta_0$,*

$$\left\|G_y^\delta\right\|_{\mathrm{L}_*^{Q/(Q-2)}(\Omega)} \leqslant C, \qquad \left\|X_j G_y^\delta\right\|_{\mathrm{L}_*^{Q/(Q-1)}(\Omega)} \leqslant C, \quad j = 1, \ldots, m\,;$$

(ii) *il existe C ne dépendant pas de δ tel que* :

$$G_y^\delta(x) \leqslant \begin{cases} C\rho(x,y)^2|\mathrm{B}(x,\rho(x,y))|^{-1} & \text{si } \rho(x,y) \geqslant 2\delta, \\ C\delta^2|\mathrm{B}(y,\delta)|^{-1} & \text{si } \rho(x,y) \leqslant 2\delta. \end{cases}$$

Démonstration. – Le théorème de Lax–Milgram entraîne l'existence de $G_y^\delta \in M_0^1(\Omega)$. Et le principe du maximum implique $G_y^\delta \geqslant 0$.

Pour $t > 0$, on pose $\varphi(x) = \max\{0, 1/t - 1/G_y^\delta\}$, et $\Omega_t = \{x \in \Omega;\ G_y^\delta > t\}$, on a

$$\left(HG(\cdot,y),\varphi\right) = \int_{\Omega_t} \sum_{j=1}^m X_j G_y^\delta X_j G_y^\delta \left(G_y^\delta\right)^{-2} = \fint_{\mathrm{B}_\delta} \varphi \leqslant \frac{1}{t}.$$

Comme $v(x) = \max\{0, \log G_y^\delta - \log t\} \in M_0^1(\Omega)$, (6) entraîne

$$(2t)(\log 2)^2|\Omega_{2t}|^{(Q-2)/Q} \leqslant (2t)\left[\int_{\Omega_{2t}} \left(\log \frac{G_y^\delta}{t}\right)^{2Q/(Q-2)}\right]^{(Q-2)/Q} \leqslant C,$$

ce qui démontre $\left\|G_y^\delta\right\|_{\mathrm{L}_*^{Q/(Q-2)}(\Omega)} \leqslant C$.

Maintenant le principe du maximum entraîne,

$$G_y^\delta(x) \leqslant C\|\overline{\chi}_{\mathrm{B}(y,\delta)}\|_{\mathrm{L}^q(\Omega)}|\Omega|^{2/Q-1/q},$$

en faisant tendre q vers $Q/2$, on a pour tout $x \in \Omega$,

$$G_y^\delta(x) \leqslant C\,\delta^2\left|\mathrm{B}(y,\delta)\right|^{-1}.$$

On a donc démontré (ii) pour $\rho \leqslant 2\delta$. Pour $R = \rho(x_0,y) \geqslant 2\delta$, comme $LG_y^\delta = 0$ sur $\Omega \setminus \mathrm{B}(y,\delta)$, l'inégalité de Harnack achève la démonstration du (ii).

Pour la deuxième estimation de (i), on a

$$\left\|XG_y^\delta\right\|_{\mathrm{L}^2}^2 = \fint_{\mathrm{B}(y,\delta)} G_y^\delta \leqslant \left|\mathrm{B}(y,\delta)\right|^{1/Q-1/2}\left\|G_y^\delta\right\|_{\mathrm{L}^{2Q/Q-2}(\Omega)} \leqslant C\left|\mathrm{B}(y,\delta)\right|^{1/Q-1/2}\left\|XG_y^\delta\right\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}.$$

En utilisant l'estimation de (ii), on a

$$\int_{\Omega\setminus \mathrm{B}(y,\delta)} \sum_{j=1}^{m} \left|X_j G_y^{\delta}\right|^2 \leqslant CR^{-2} \int_{\mathrm{B}(y,R)\setminus \mathrm{B}(y,R/2)} \left|G_y^{\delta}\right|^2 \leqslant CR^2 \left|\mathrm{B}(y,R)\right|^{-1}.$$

Posons $R = t^{-1/(Q-1)}$ et $\Omega_t = \left\{x \in \Omega;\ \sum_{j=1}^{m} |X_j G_y^{\delta}(x)|^2 > t^2\right\}$, on a alors

$$\left|\Omega_t \cap \left(\Omega \setminus \mathrm{B}(y,R)\right)\right| \leqslant C\left(t^{-1}\right)^{Q/(Q-1)}.$$

D'autre part, on a trivialement, en traitant les cas $R \leqslant R_0$ et $R > R_0$,

$$\left|\Omega_t \cap \mathrm{B}(y,R)\right| \leqslant \left|\mathrm{B}(y,R)\right| \leqslant CR^Q = C\left(t^{-1}\right)^{Q/(Q-1)}.$$

On a alors obtenu $|\Omega_t| \leqslant C(t^{-1})^{Q/(Q-1)}$. Par définition de la norme de L^p_*, on a démontré (i). □

Démonstration du théorème. – Il existe $C > 0$ tel que pour tout $s \in [1, Q/(Q-1)[$, $\left\|G_y^{\delta}\right\|_{M_0^{1,s}(\Omega)} \leqslant C$. Soient $(\delta_\nu) \searrow 0$ et $(s_\nu) \nearrow Q/(Q-1)$. Le processus diagonal assure l'existence d'une limite $G_y \in M_0^{1,s}(\Omega)$ pour tout $s < Q/(Q-1)$ et

$$\|G_y\|_{\mathrm{L}_*^{Q/(Q-2)}(\Omega)} \leqslant C, \qquad \|XG_y\|_{\mathrm{L}_*^{Q/(Q-1)}(\Omega)} \leqslant C.$$

En utilisant le théorème de Rellich, on a que $G_y^{\delta_\mu}(x) \to G_y(x)$ pour presque tout $x \in \Omega$. Comme G_y^{δ}, et G_y sont continues sur $\Omega \setminus \{y\}$, alors (1) est une conséquence de (ii) de la proposition.

Pour (2), soient $x, y \in \Omega$, $\rho(x,y) < (1/2)\mathrm{dist}_\rho(y, \partial\Omega)$ et $r = \rho(x,y)$, choisissons $\varphi \in \mathrm{C}_0^\infty(\mathrm{B}(y,r))$, $\varphi(x) = 1$, $x \in \mathrm{B}(y, r/2)$, en utilisant l'inégalité de Harnack, on a

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{\frac{r}{2}\leqslant\rho(z,y)\leqslant r} \sum_{j=1}^{m} X_j G(z,y) X_j\varphi(z)\,\mathrm{d}z \leqslant Cr^{-1} \int_{\frac{r}{2}\leqslant\rho(z,y)\leqslant r} \left|XG(z,y)\right|\mathrm{d}z \\ &\leqslant Cr^{-3}\left|\mathrm{B}(y,r)\right|^{3/2}\Big(\sup_{\frac{r}{4}\leqslant\rho(z,y)\leqslant\frac{3r}{2}} G(z,y)^2\Big)^{1/2} \leqslant Cr^{-2}\left|\mathrm{B}(y,r)\right| \inf_{\frac{r}{4}\leqslant\rho(z,y)\leqslant\frac{3r}{2}} G(z,y), \end{aligned}$$

d'où (2), ce qui achève la démonstration du théorème. □

* Le travail du second auteur est partiellement financé par la NNSF de Chine.

Références bibliographiques

[1] Bony J.-M., Principe du maximum, inégalité de Harnack et unicité du problème de Cauchy pour les opérateurs elliptiques dégénérés, Ann. Inst. Fourier 19 (1969) 227–304.
[2] Grüter M., Widman K.-O., The Green function for uniformly elliptic equations, Manuscr. Math. 37 (1982) 303–342.
[3] Jerison D., The Poincaré inequality for vector fields satisfying Hörmander's condition, Duke Math. J. 53 (1986) 503–523.
[4] Moser J., On Harnack's theorem for elliptic differential equations, *Comm. Pure Appl. Math.* 14 (1961) 577–591.
[5] Nagel A., Stein E.M., Wainger S., Balls and metrics defined by vector fields I, basic properties, Acta Math. 155 (1985) 103–147.
[6] Sánchez-Calle A., Fundamental solutions and geometry of the sum of squares of vector fields, Invent. Math. 78 (1984) 143–160.
[7] Xu C.-J., Subelliptic variational problems, Bull. Soc. Math. France 118 (1990) 147–169.