THÉORÈMES DE TRACE ET DE RELÈVEMENT SUR LE GROUPE DE HEISENBERG

H. BAHOURI & J.-Y. CHEMIN & C.-J. XU

1. Introduction

On démontre dans ce travail des théorèmes de trace et de relèvement pour les espaces de Sobolev associés à un système de champs de vecteurs satisfaisant la condition de sous ellipticit de Hörmander. Rappelons cette condition. On dit que le système $P = \{P_1, ...P_m\}$ *satisfait la condition de Hörmander d'ordre 2* si le systme $\{P_1, ...P_m, [P_i, P_j]\}$ est de rang maximal. On s'intressa plus spcialement au systme de champs de vecteurs associ au groupe d'Heisenberg $\mathbb{H}^d$. Il s'agit du système de champs de vecteurs

$$X_j = \partial_{x_j} + y_j \partial_s, \;\; Y_j = \partial_{y_j} - x_j \partial_s; \quad j = 1, ...d, \text{ sur } \mathbb{R}^{2d+1}.$$

Notons que le rang de $\{X_1, ...X_d, Y_1, ..Y_d, [X_i, Y_i]\}$ est égal à $2d + 1$ et que, pour tout i, le champ de vecteurs X_i commute avec tous les champs du systme l'exception de Y_i.

Étant donn un systme de champs de vecteurs P satisfaisant la condition de Hörmander l'ordre 2, on associe chaque entier positif $k \in \mathbb{N}$, l'espace de Sobolev d'indice k dfini par

$$H^k(P) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n); P^J u \in L^2(\mathbb{R}^n), |J| \leq k\}$$

où l'on convient que $P^J = P_{J_1} ... P_{J_\ell}$ si $J = (J_1, ..., J_\ell)$ et $|J| = \ell$.

Pour ce type d'espaces de Sobolev, on a presque des propriétés trs analogues celles des espaces de Sobolev usuels, par exemple les injections de Sobolev (l'indice de Sobolev étant donné, dans le cas du groupe de Heisenberg $\mathbb{H}^d$, par la dimension homogène $2d+2$), inégalité de Poincaré, propriétés d'isomorphisme pour l'opérateur $-\Delta_P = \sum_{j=1}^m P_j^* P_j$. De plus, le thorme de sous ellipticit de Hörmander implique que $H^k(P)$ est inclus dans l'espace de Sobolev usuel $H^{\frac{k}{2}}$.

Pour $s \in \mathbb{R}$, les espaces de Sobolev $H^s(P)$ peuvent être définis de multiples faons : soit par dualit et interpolation, soit par le calcul de Weyl-Hörmander, (voir [7]) soit par l'introduction d'un module de continuité, (voir [4]) soit dans le cas du groupe de Heisenberg par la décomposition de Littlewood-Paley en utilisant la transforme de Fourier sur le groupe d'Heisenberg (voir [1] et [2]).

Concernant le problème de trace et de relèvement pour $H^s(P)$, le premier résultat est dû à Derridj, il a montré que dans le cas non caractéristique, l'opérateur de trace envoie continûment $H^1(P)$ dans L^2 ; par la suite, I. Pesenson a résolu dans [14] le problème de trace pour $H^s(X)$ dans le cas non caractéristique avec $s \geq 1$, enfin, S. Berhanu et I. Pesenson ont obtenu dans [4] un théorème de trace et de relèvement pour $H^1(P)$ dans le cas d'une surface non caractéristique Σ, pour laquelle P_Σ, la projection du système P sur $T\Sigma$ parallèlement à un champ de vecteurs de P transverse à Σ, satisfait encore la condition de Hörmander l'ordre 2.

Sminaire: quations aux Drives Partielles, 1999–2000, Exp. No. VIII, 18 pp., Smin. qu. Driv. Partielles, cole Polytech., Palaiseau, 2000.

Dans ce travail, nous avons résolu le problème des traces pour $H^s(P)$ dans le cas général non caractéristique avec $s > \frac{1}{2}$. La démonstration de ce premier résultat repose sur le calcul de Weyl-Hörmander ; il implique en particulier que la trace est une application continue de $H^s(P)$ dans l'espace de Sobolev usuel $H^{\frac{s}{2}-\frac{1}{4}}$ sur Σ.

En utilisant la théorie d'interpolation et les résultats de C. Cancelier- J.-Y. Chemin et C.-J. Xu, on peut interpréter l'espace de trace, dans le cas d'une surface Σ non caractéristique pour le système P, comme suit :

Théorème 1.1. *Désignons par γ l'opérateur de trace sur Σ ; pour tout entier $k \geq 1$, l'application γ se prolonge en une application continue surjective de l'espace $H^k(P)$ sur l'espace $[L^2(\Sigma), H^{k/2}(\Sigma) \cap H^k(P_\Sigma)]_{\frac{1}{2k}}$.*

Le second résultat que nous avons établi traite d'un point caractristique isol dans le cadre du groupe de Heisenberg (voir théorème 4.1 ci-aprs), il est obtenu comme conséquence du thorme ci-dessus. En utilisant l'invariance par scaling et grâce à une partition de l'unité bien appropriée, on ramène le problème au cas non caractéristique.

La motivation principale de ce travail est le problème de Dirichlet sur le groupe de Heisenberg apparaissant de manière évidente dans l'étude des problèmes de Yamabe C.R ou de courbure de Webster lorsqu'ils sont considérés via des méthodes variationnelles.

Le plan de ce texte est, le suivant :

2. Étude d'un cas modèle.
3. Énoncé du résultat dans le cas non caractéristique.
4. Cas caractéristique : Énoncé du résultat et preuve.
5. Calcul de Weyl-Hörmander.
6. Une preuve "élémentaire" dans le cas des indices entiers
7. Un aperçu de la preuve pour les indices non entiers.

Remerciements.
Les auteurs remercient A. Bahri de les avoir incité à réfléchir à ce problème.

2. Étude d'un cas modèle

Dans cette section, on va donner une preuve élémentaire du théorème 1.1 dans le cas particulier où $P = \{\partial_{x_1}, x_1\partial_{x_2}\}$ et $\Sigma = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2;\ x_1 = 0\}$. Comme $P_\Sigma = \{0\}$, le théorème 1.1 se formule pour ce système de la manière suivante.

Théorème 2.1. *L'application trace γ sur Σ se prolonge en une application continue surjective de $H^k(P)$ sur $H^{\frac{k}{2}-\frac{1}{4}}(\mathbb{R})$, l'espace $H^{\frac{k}{2}-\frac{1}{4}}(\mathbb{R})$ désignant l'espace de Sobolev usuel.*

Remarques

(1) La preuve de ce théorème s'adapte de manière triviale au cas général de $P_\Sigma = \{0\}$.

(2) Pour le système $P_m = \{\partial_{x_1}, x_1^m\partial_{x_2}\}, m \geq 1$, on obtient par une lgère modification de la preuve ci-dessous que

$$\gamma : H^k(P_m) \longrightarrow H^{\frac{k}{m+1}-\frac{1}{2(m+1)}}(\mathbb{R})$$

est continue surjective.

Preuve : En posant, pour $t \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, $\gamma_t(u)(x_2) = u(t, x_2)$, on a, en dsignant par $\widehat{u}^2$ la transforme de Fourier de u par rapport la seconde variable,

$$\begin{aligned}
\|\gamma_t(u)\|^2_{H^{\frac{k}{2}-\frac{1}{4}}(\mathbb{R})} &= \int < \xi_2 >^{k-\frac{1}{2}} |\widehat{u}^2(t, \xi_2)|^2 d\xi_2 \\
&= \int < \xi_2 >^{k-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{t} \frac{\partial}{\partial x_1} |\widehat{u}^2(x_1, \xi_2)|^2 dx_1 d\xi_2 \\
&= 2 \int < \xi_2 >^{k-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{t} \Big(\frac{\partial \widehat{u}^2}{\partial x_1}(x_1, \xi_2) |\widehat{u}^2(x_1, \xi_2) \Big) dx_1 d\xi_2.
\end{aligned}$$

D'aprs une ingalit de Cauchy-Schwarz, il vient

$$\begin{aligned}
\|\gamma_t(u)\|^2_{H^{\frac{k}{2}-\frac{1}{4}}(\mathbb{R})} &\leq 2 \int < \xi_2 >^{k-\frac{1}{2}} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} |\frac{\partial \widehat{u}^2}{\partial x_1}(x_1, \xi_2)|^2 dx_1 \Big)^{1/2} \\
&\qquad \times \Big(\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{u}^2(x_1, \xi_2)|^2 dx_1 \Big)^{1/2} d\xi_2 \\
&\leq 2 \|\partial_{x_1} u\|_{L^2(\mathbb{R}, H^{\frac{k}{2}-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}))} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}, H^{\frac{k}{2}}(\mathbb{R}))}.
\end{aligned}$$

Mais, d'aprs le thorme de sous ellipticit, on a $H^{k-1}(P) \subset H^{\frac{k-1}{2}}(\mathbb{R}^2)$. Donc $\partial_{x_1} u$ appartient $H^{\frac{k}{2}-\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$. Comme k est plus grand que 1, on a $H^{\frac{k}{2}-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R}, H^{\frac{k}{2}-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}))$ d'où la continuité de γ.

Soit à présent v dans $H^{\frac{k}{2}-\frac{1}{4}}(\mathbb{R})$; posons

$$u(x_1, x_2) = \mathcal{F}^{-1}_{\xi_2}(\chi(x_1 < \xi_2 >^{1/2}) \widehat{v}(\xi_2))$$

où χ est une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ valant 1 en 0. Il est alors clair que $\gamma(u) = v$; par ailleurs, pour $k_1 + 2k_2 + k_3 \leq k$, on a

$$\begin{aligned}
\|(x_1 \partial_{x_2})^{k_1} \partial^{k_2}_{x_2} \partial^{k_3}_{x_1} u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} &= \int |(x_1 \partial_{x_2})^{k_1} (\partial_{x_2})^{k_2} (\partial_{x_1})^{k_3} u(x_1, x_2)|^2 dx_1 dx_2 \\
&= c \int |x_1^{k_1} \xi_2^{k_1+k_2} < \xi_2 >^{\frac{k_3}{2}} \chi^{(k_3)}(x_1 < \xi_2 >^{1/2}) \widehat{v}(\xi_2)|^2 dx_1 d\xi_2 \\
&\leq c \int |y_1^{k_1} \chi^{(k_3)}(y_1) < \xi_2 >^{\frac{k_1}{2}+k_2+\frac{k_3}{2}} \widehat{v}(\xi_2)|^2 < \xi_2 >^{-1/2} dy_1 d\xi_2 \\
&\leq c \int |y_1^{k_1} \chi^{(k_3)}(y_1)|^2 < \xi_2 >^{k-\frac{1}{2}} |\widehat{v}(\xi_2)|^2 dy_1 d\xi_2 \\
&\leq c \|v\|^2_{H^{\frac{k}{2}-\frac{1}{4}}}(\mathbb{R}).
\end{aligned}$$

D'où la surjectivité de l'application γ.

3. Énoncé du résultat dans le cas non caractéristique.

Désignons par $\mathcal{X}$ le C^∞-module des champs de vecteurs engendré par $P = (P_1, ..., P_m)$ et considrons une hypersurface C^∞ de $\mathbb{R}^n$, note Σ.

Définition 3.1. *On dit que Σ est non caractéristique pour P si, pour tout $x \in \Sigma, \mathcal{X}|_x$ n'est pas inclus dans $T_x\Sigma$.*

On désigne par $\mathcal{X}_\Sigma$ le sous-espace de $T\Sigma$ défini par $\mathcal{X}_\Sigma|_x = T_x\Sigma \cap \mathcal{X}|_x$.

Remarque

Soit x un point de Σ ; l'hypersurface Σ étant non caractéristique en x pour P, il existe P_j un champ de vecteurs de P transverse à Σ au point x, on peut alors voir $\mathcal{X}_\Sigma|_x$ comme la projection de $\mathcal{X}|_x$ sur l'espace tangent $T_x\Sigma$ parallèlement à $P_j(x)$. Il est clair que ce sous espace est indépendant du choix de P_j.

Le lemme suivant explicite la structure de $\mathcal{X}_\Sigma$ dans le cas particulier où $\mathcal{X}$ est le C^∞-module engendré par les champs de vecteurs invariants à gauche sur le groupe de Heisenberg.

Lemme 3.1. *Considrons une hypersurface Σ de $\mathbb{R}^{2d+1}$ non caractéristique pour le C^∞-module de champs vecteurs $\mathcal{X}$ sur $\mathbb{R}^{2d+1}$ engendré par $X = \{X_1, ..., X_d, Y_1, ..., Y_d\}$, alors $\mathcal{X}_\Sigma$ satisfait encore la condition de Hörmander à l'ordre 2.*

En désignant par γ l'opérateur de trace sur Σ, on a démontré dans le cas où Σ est non caractéristique pour X le thorme suivant.

Théorème 3.1. *Si $s > \frac{1}{2}$, alors*

$$\gamma : H^s(X) \longrightarrow H^{s-1/2}(X_\Sigma)$$

est une application continue surjective.

Dans le cas général d'un système de champs de vecteurs $P = (P_1, ..., P_m)$ satisfaisant la condition de Hörmander à l'ordre 2, après localisation, projection parallèlement à un champ de vecteurs transverse et extension, on se ramne au cas suivant:

$$P_1 = \partial_{x_1}\ ,\ P_j = \sum_{\ell=2}^{n} P_j^\ell(x_1, x')\partial_{x_\ell} \quad \text{avec} \quad j \in \{2, ..., m\} \quad \text{et} \quad \Sigma = \{(x_1, x') \in \mathbb{R}^n \ \ ; \ \ x_1 = 0\}.$$

On définit le poids associé

$$M(x, \xi) = (\xi_1^2 + m(x, \xi')^2)^{1/2} \quad \text{o} \quad m(x, \xi')^2 = \sum_{j=2}^{m} P_j(x_1, x', \xi')^2 + < \xi' > .$$

En vertu des résultats de C. Cancelier, J.-Y. Chemin et C.-J. Xu dmontrs dans [7], on a

$$H^s(P) = H(M^s).$$

Il s'agit d'une définition " la Littlewood-Paley" de $H^s(P)$ faisant appel au calcul de Weyl-Hörmander qui offre une bonne procédure de localisation dans l'espace des phases. L'étude des espaces de Sobolev abstraits dans le contexte du calcul de Weyl-Hörmander a été développée dans [5], [6], [7] et [8].

En désignant par m la restriction de M à $T^*\Sigma$, on a, dans le cas non caractéristique, obtenu le résultat suivant.

Théorème 3.2. *Si $s > \frac{1}{2}$, alors*

$$\gamma_\Sigma : H(M^s) \longrightarrow H(m^{s-1/2})$$

est une application continue surjective.

Il s'agit du théorème clef de cette section. Sa preuve est une adaptation de la preuve du théorème de trace classique au contexte du calcul de Weyl-Hörmander.

4. Cas caractéristique : Énoncé du résultat et preuve.

Pour le cas caractéristique, on s'est limité au groupe de Heisenberg et notre approche qui consiste à se ramener au cas non caractéristique en utilisant l'invariance par scaling ne peut être adaptée au cas général.

Les points caractéristiques sur une surfaces de $\mathbb{H}^d$ peuvent avoir une structure assez complique. Dans un souci de simplification, nous nous limiterons dans cet exposé au cas de l'hyperplan $\Sigma_0 = \{s = 0\}$. Il possède un seul point caractéristique $(0,0,0)$. Pour plus de dtails sur la nature des points caractristiques pouvant tre traits, voir [3].

Le premier point essentiel dans l'étude des points caractéristiques de ce type est la construction d'une partition de l'unité adéquate. Pour ce faire, considérons une fonction φ de $\mathcal{D}(\mathbb{R}\backslash\{0\})$ telle que

$$\forall\, t,\ \ 0 < |t| \leq 1,\ \ \sum_{p=0}^{\infty} \varphi(2^p t) = 1.$$

Pour $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2d+1})$, à support dans $\{\rho(x,y,s) \leq 1\}$ où

$$\rho(x,y,s) = ((|x|^2 + |y|^2)^2 + s^2)^{1/4}$$

est la norme de Heisenberg, on écrit

$$u = \sum_{p=0}^{\infty} \varphi_p u$$

où $\varphi_p(x,y,s) = \varphi(2^p \rho(x,y,s))$. Calculons maintenant $X(\varphi_p u)$, d'après la formule de Leibnitz, on a

$$X(\varphi_p u) = \varphi_p X u + u X \varphi_p.$$

Or, $X\varphi_p = 2^p \varphi'(2^p\rho) X\rho$ et comme pour $\rho \leq 1, |X\rho| \leq c$, on obtient

$$\|X(\varphi_p u)\|_{L^2}^2 \leq C 2^{2p} \|\varphi_p' u\|_{L^2}^2 + 2\|\varphi_p X u\|_{L^2}^2.$$

Par définition de φ_p, on a $2^{2p} \sim \rho^{-2}$ sur le support de $\varphi_p' u$; on en déduit que

$$2^{2p} \|\varphi_p' u\|_{L^2}^2 \leq C \int \frac{|\varphi_p' u|^2}{\rho^2} dxdyds.$$

Les fonctions $\varphi_{p'}' u$ et $\varphi_p' u$ étant à supports disjoints dès que $|p - p'|$ est assez grand, on a

$$\sum_{p=0}^{\infty} 2^{2p} \|\varphi_p' u\|_{L^2}^2 \leq C \int \frac{|u|^2}{\rho^2} dxdyds$$

d'où le lemme suivant en vertu de l'inégalité de Hardy sur le groupe de Heisenberg dmontr dans [16].

Lemme 4.1. *Dsignons par $H^1(X, B_1)$ l'ensemble des fonctions appartenant $H^1(X)$ et dont le support est inclus dans $B_1 = \{\rho \leq 1\}$. Il existe une constante C telle que*

$$\forall u \in H^1(X, B_1)\,,\ \frac{1}{C} \sum_{p=0}^{\infty} \|X(\varphi_p u)\|_{L^2}^2 \leq \|u\|_{H^1(X)}^2 \leq C \sum_{p=0}^{\infty} \|X(\varphi_p u)\|_{L^2}^2.$$

On désigne par $\mathcal{R}$ la famille des champs de vecteurs que nous appelerons "radiaux" sur Σ_0, obtenus pour $(x,y,s) \in \Sigma_0^* = \Sigma_0 \backslash \{(0,0,0\}$ par la projection de X sur $T\Sigma_0$ parallèlement à un champ de vecteurs transverse. Cette famille $\mathcal{R}$ est donnée par

$$\mathcal{R} = \left\{ x_k \partial_{x_j} + y_j \partial_{y_k}, x_k \partial_{y_j} - x_j \partial_{y_k}, y_k \partial_{x_j} - y_j \partial_{x_k} \quad \text{pour} \quad 1 \leq j,k \leq d \right\}.$$

En posant

$$m(x,y,\xi,\eta) \stackrel{\text{déf}}{=} \Big(1 + |\xi|^2 + |\eta|^2 + \sum_{R \in \mathcal{R}} R^4(x,y,\xi,\eta)\Big)^{1/4}.$$

On définit l'espace $T^{\frac{1}{2}}(\Sigma_0 \cap B_1)$ de fonctions sur Σ_0 par

$$T^{1/2}(\Sigma_0 \cap B_1) = \left\{ v \in L^2(\Sigma_0) \,/\, \text{supp } v \subset \Sigma_0 \cap B_1 \text{ et } \sum_{p=0}^{\infty} 2^{-2pd} \|(\widetilde{\varphi}_p v)_p\|^2_{H(m^{1/2})} < +\infty \right\}$$

où l'on pose

$$\widetilde{\varphi}_p(x,y) \stackrel{\text{déf}}{=} \varphi(2^p|(x,y)|) \quad \text{et} \quad a_p(x,y) \stackrel{\text{déf}}{=} a(2^{-p}x, 2^{-p}y).$$

L'espace des traces de $H^1(X, B_1)$ sur Σ_0 est alors donné par le théorème suivant.

Théorème 4.1. *L'opérateur de trace*

$$\gamma : H^1(X, B_1) \longrightarrow T^{1/2}(\Sigma_0 \cap B_1)$$

est une application continue surjective.

Remarques

a) On a montré que pour $u \in H^1(X, B_1)$, $\gamma(u) \in L^2$ et $\rho^{1/4}\gamma(u) \in H^{1/4}$. La deuxième propriété peut être interprétée comme une propriété microlocale.

b) La preuve de ce théorème se ramène au cas non caractéristique grâce à la partition de l'unité définie ci-dessus et la dilatation sur le groupe de Heisenberg. Il est à noter que l'espace $T^{1/2}(\Sigma_0 \bigcap B_1)$ est de scaling 0 comme l'espace $H^1(X, B_1)$.

Preuve

On applique maintenant la dilatation de paramètre 2^p sur le groupe de Heisenberg en posant

$$u_p(x,y,s) = (\varphi_p u)(2^{-p}x, 2^{-p}y, 2^{-2p}s).$$

Un calcul des plus élémentaires implique que

$$\|Xu_p\|_{L^2} = 2^{pd}\|X(\varphi_p u)\|_{L^2}.$$

Par ailleurs, le support de la fonction u_p est inclus dans la couronne pour la sous-distance ρ sur le groupe d'Heisenberg $\mathcal{C} = \{\rho(x,y,s) \sim 1\}$ qui est un compact indépendant de p et ne rencontrant pas l'origine. Donc Σ_0 est non caractéristique sur le support de u_p et les résultats du théorème 3.2 s'appliquent à u_p. On en déduit que

$$\gamma(u_p) \in H(m^{1/2}) \quad \text{et que} \quad \|\gamma(u_p)\|_{H(m^{1/2})} \leq C\|Xu_p\|_{L^2}.$$

D'où la continuité de l'opérateur trace, en vertu du lemme 3.1.

Montrons à présent la surjectivité de γ. Étant donn une fonction v de $T^{1/2}(\Sigma_0 \cap B_1)$, posons $v_p(x,y) = (\widetilde{\varphi}_p v)(2^{-p}x, 2^{-p}y)$. Comme supp $v_p \subset \{|(x,y)| \sim 1\}$, on dduit du théorème 3.1 l'existence d'une fonction u_p de $H^1(X)$ telle que

$$\gamma(u_p) = v_p \quad \text{et} \quad \|u_p\|_{H^1(X)} \leq C\|v_p\|_{H(m^{1/2})}.$$

On pose $\widetilde{u}_p \stackrel{\text{déf}}{=} (u_p)_{-p}$; on a alors

$$\|\widetilde{u}_p\|_{H^1(X)} \leq C2^{pd}\|v_p\|_{H(m^{1/2})}.$$

Posons à présent $\widetilde{\widetilde{u}}_p = \psi_p \widetilde{u}_p$ où $\psi_p(x,y,s) = \psi(2^p\rho), \psi$ étant une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R}\backslash\{0\})$ égale à 1 sur le support de φ et satisfaisant

$$\forall\, t, \;\; 0 < |t| \leq 1, \;\; \sum_{p=0}^{\infty} \psi(2^p t) = 1.$$

Comme $\psi_p|_{\Sigma_0}$ vaut identiquement 1 sur le support de $(\widetilde{\varphi}_p)$, on a

$$\gamma(\widetilde{\widetilde{u}}_p) = \widetilde{\varphi}_p v.$$

Enfin, la presqu'orthogonalité de la famille $(\widetilde{\widetilde{u}}_p)$ implique que $u = \sum \widetilde{\widetilde{u}}_p$ est un relèvement continu de v dans $H^1(X)$, ce qui achève la preuve du théorème.

5. Rappels sur le calcul de Weyl-Hörmander

On suit dans ce paragraphe [5] et [6]. La quantification de Weyl permet d'associer un opérateur a^w, agissant dans $\mathbb{R}^n$ à une fonction a (le symbole de a^w) définie sur l'espace des phases $\mathbb{R}^{2n}$. Cet opérateur a^w est défini par

$$a^w u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{i<x-z,\xi>} a(\frac{x+z}{2}, \xi) u(z) dz d\xi.$$

En notant par $[X, Y]$ la forme symplectique standard, on a la formule de composition suivante $a^w \circ \ b^w = (a\# b)^w$ avec

$$(a\# b)(X) = \pi^{-2n} \int_{\mathbb{R}^{2n}\times\mathbb{R}^{2n}} e^{-2i[X-Y_1, X-Y_2]} a(Y_1) b(Y_2) dY_1 dY_2.$$

Définissons le concept d'une métrique de Hörmander.

Définition 5.1. *Soit g une application mesurable de $\mathbb{R}^{2n}$ sur l'ensemble des formes quadratiques définies positives sur $\mathbb{R}^{2n}$. On dit que g est une métrique de Hörmander si et seulement si les trois conditions suivantes sont vérifiées.*

Lenteur *Il existe $c_0 > 0$ telle que l'on ait*

$$g_X(X-Y) \leq \frac{1}{c_0} \Rightarrow c_0^{-1} g_X \leq g_Y \leq c_0 g_X.$$

Principe d'incertitude *On a*

$$g_X \leq g_X^\sigma \quad \textit{avec} \quad g_X^\sigma(T) = \sup_{W\neq 0} \frac{[T, W]^2}{g_X(W)}.$$

Tempérance *Il existe $c_0 > 0$ et $N_0 \in \mathbb{N}$ tels que l'on ait pour tout (X, Y) de $\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n}$*

$$c_0^{-1}(1 + g_Y^\sigma(X-Y))^{-N_0} g_X \leq g_Y \leq c_0 (1 + g_Y^\sigma(X-Y))^{N_0} g_X.$$

Considérons une métrique de Hörmander g et fixons un nombre réel r strictement plus petit que c_0^{-1}. Dans ce qui suit, désignons par U_X la g_X-boule de centre X et de rayon $r^{1/2}$ et notons $\Delta(X, Y)$ la quantité suivante qui exprime l'éloignement (pour g^σ) de deux g-boules

$$\Delta(X, Y) = 1 + \max\{g_X^\sigma(U_X - U_Y), g_Y^\sigma(U_X - U_Y)\}$$

où

$$g_X^\sigma(U_X - U_Y) = \inf_{(X',Y')\in U_X\times U_Y} g_X^\sigma(X' - Y').$$

Dans ce qui suit, on omet le fait que cette fonction dépend de r. Comme il a été prouvé dans [6], on peut substituer les conditions de lenteur et de tempérence par

$$\frac{1}{c_0} \Delta(X, Y)^{-N_0} g_X \leq g_Y \leq c_0 \Delta(X, Y)^{N_0} g_X.$$

L'une des propriétés fondamentales de la fonction Δ, visiblement symétrique, est décrite par le lemme suivant, démontré dans [6].

Lemme 5.1. *Il existe un entier N_1 tel que*

$$\sup_{X\in\mathbb{R}^{2n}} \int_{Y\in\mathbb{R}^{2n}} \Delta(X, Y)^{-N_1} |g_Y|^{1/2} dY < \infty,$$

où $|g_Y|^{1/2}$ désigne le déterminant de la forme quadratique g_Y dans une quelconque base symplectique de $\mathbb{R}^{2n}$.

Une métrique de Hörmander décrit une procédure de localisation admissible dans l'espace des phases. Notons que si a et b sont deux fonctions à support compact sur $\mathbb{R}^{2n}$, il n'y a aucune raison pour que $a\#b$ le soit. La notion correcte est la suivante :

Définition 5.2. *Soit γ une forme quadratique sur $\mathbb{R}^{2n}$ définie positive telle que $\gamma^\sigma \geq \gamma$ et Y un point de $\mathbb{R}^{2n}$. On munit $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ de la famille de semi-normes suivantes appelées semi-normes de confinement*

$$\|a\|_{k,\ conf\ (\gamma,Y)} = \sup_{\substack{X\in\mathbb{R}^{2n}\\ j\leq k,\gamma(T_j)\leq 1}} (1+\gamma^\sigma(X-B_\gamma(Y,r))^{k/2}|\partial_{T_1}...\partial_{T_j}a(X)|.$$

Soit g une métrique de Hörmander et $(a_Y)_{Y\in\mathbb{R}^{2n}}$ une famille de fonctions de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$. Cette famille est uniformément confinée si et seulement si, pour tout entier k,

$$\|(a_Y)\|_{k,\ conf\ (g)} = \sup_{Y\in\mathbb{R}^{2n}} \|a_Y\|_{k,\ conf\ (g_Y,Y)} < \infty.$$

L'intérêt principal du concept de confinement est l'estimation de bi-confinement suivante, démontrée dans [6].

Soit g une métrique de Hörmander, a et b deux fonctions de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$. Pour tout couple d'entiers (k,N), il existe un entier ℓ et constante C tels que, pour tout couple (Y,Z) de $\mathbb{R}^{2n}\times\mathbb{R}^{2n}$, on ait

$$\begin{aligned}\|a\#b\|_{k,\text{ conf }(g_Y,Y)} &+ \|a\#b\|_{k,\text{ conf }(g_Z,Z)}\\ &\leq C\Delta(Y,Z)^{-N}\|a\|_{\ell,\text{ conf }(g_Y,Y)}\|b\|_{\ell,\text{ conf }(g_Z,Z)} \qquad (5.1)\end{aligned}$$

Dans ce qui suit, il est commode, bien que non absolument nécessaire, de supposer que la métrique g est fortement tempérée (voir [5] pour une définition précise). Cette hypothèse implique en particulier le lemme suivant.

Lemme 5.2. *Il existe deux familles uniformément confinées (φ_Y) et (ψ_Y) telles que, pour tout $X\in\mathbb{R}^{2n}$, on ait*

$$\int_{Y\in\mathbb{R}^{2n}} \varphi_Y(X)|g_Y|^{1/2}dY = \int_{Y\in\mathbb{R}^{2n}} (\psi_Y\#\varphi_Y)(X)|g_Y|^{1/2}dY = 1.$$

Définissons à présent les concepts de g-poids, de g-symboles et des espaces de Sobolev.

Définition 5.3. *Soit g une métrique de Hörmander, on dit qu'une fonction mesurable m définie sur $\mathbb{R}^{2n}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^*_+$ est un g-poids si et seulement si il existe une constante $\widetilde{C}$ et un entier $\widetilde{N}$ tels que*

$$\left(\frac{m(X)}{m(Y)}\right)^{\pm 1} \leq \widetilde{C}\Delta(X,Y)^{\widetilde{N}}.$$

Soit m un g-poids. On désigne par $S(m,g)$ l'ensemble des fonctions a indéfiniment différentiables telles que, pour tout entier k,

$$\|a\|_{k,S(m,g)} = \sup_{\substack{j\leq k, X\in\mathbb{R}^{2n}\\ g_X(T_j)\leq 1}} \frac{|\partial_{T_1}...\partial_{T_j}a(X)|}{m(X)} < \infty.$$

Soit g une métrique de Hörmander et m un g-poids. L'espace $H(m,g)$ est l'ensemble des distributions tempérées u telles que

$$\|u\|_{H(m,g)} = \left(\int m(Y)^2\|\varphi_Y^w u\|^2_{L^2}|g_Y|^{1/2}dY\right)^{1/2} < \infty.$$

L'espace $H(m,g)$ est l'ensemble des distributions tempérées u sur $\mathbb{R}^n$ telles que pour tout $a \in S(m,g), a^w u \in L^2$. Et $H(1,g) = L^2$. De plus l'espace $H(m,g)$ est "presque indépendant" de la métrique g.

6. Une preuve "élémentaire" dans le cas des indices entiers

Dans cette section, nous allons étudier le problème des traces de $H^k(P)$. Après localisation, projection parallèlement à un champ de vecteurs transverse et extension, on se ramne au cas o

$$P_1 = \partial_{x_1} \quad \text{et} \quad P_j = \sum_{\ell=2}^{n} P_j^\ell(x_1, x')\partial_{x_\ell} \quad \text{pour} \quad j \in \{2, \cdots, m\}$$

et o $\Sigma = \{(x_1, x') \in \mathbb{R}^n \;\; ; \;\; x_1 = 0\}$. En désignant par $\widetilde{g}$ la métrique sur $T^*\mathbb{R}^n$ définie par

$$\widetilde{g}_{(x,\xi)}(dx^2, d\xi^2) =< \xi' > dx^2 + \frac{1}{< \xi' >} d\xi^2,$$

on remarque que si l'on restreint cette métrique à $T^*\Sigma$, on trouve g la métrique dite $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$,

$$g_{(x',\xi')}(dx'^2, d\xi'^2) =< \xi' > dx'^2 + \frac{1}{< \xi' >} d\xi'^2.$$

D'après [3], on a le lemme suivant.

Lemme 6.1. *La fonction définie par*

$$M(x,\xi) = (\xi_1^2 + m(x,\xi')^2)^{1/2}$$

où l'on a pos

$$m(x,\xi')^2 = \sum_{j=2}^{m} P_j(x_1, x', \xi')^2 + < \xi' >$$

est un $\widetilde{g}$-poids sur $T^*\mathbb{R}^n$. En particulier, $m(0, x', \xi')$ est un g-poids sur $T^*\Sigma$. De plus, il existe une constante C telle que

$$\|u\|^2_{\widetilde{H}^k(P)} \overset{déf}{=} \int_{\mathbb{R}} \|\partial_t u(t,\cdot)\|^2_{H(m^{k-1}(t,\cdot))} dt + \int_{\mathbb{R}} \|u(t,\cdot)\|^2_{H(m^k(t,\cdot))} dt \le C \|u\|^2_{H^k(P)}$$

La continuité de l'opérateur de trace dans le cas non caractéristique pour $H^k(P)$ est une conséquence immédiate du théorème suivant.

Théorème 6.1. *Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $u \in H^k(P)$, on ait*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|u(t,\cdot)\|_{H(m^{k-\frac{1}{2}}(t,\cdot))} \le C \|u\|_{\widetilde{H}^k(P)}.$$

La démonstration de ce théorème est très simple. La fonction u étant supposée dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, on considère, pour $Y = (y', \eta') \in T^*\Sigma$ et (θ_Y) une g-partition de l'unité, la quantité suivante

$$I_Y(u)(t) \overset{\text{déf}}{=} m^{2k}(t,Y) \|\theta_Y^w u(t,\cdot)\|^2_{L^2(\Sigma)},$$

et l'on écrit qu'elle est l'intégrale de sa dérivée. D'où il vient que

$$M_Y(u)(t) = (2k-1) \int_{-\infty}^{t} \partial_t m(t',Y) m(t',Y)^{2k-2} \|\theta_Y^w u(t',\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})} dt'$$
$$+ 2 \int_{-\infty}^{t} m(t',Y)^{2k-1} (\theta_Y^w \partial_t u(t',\cdot) | \theta_Y^w \partial_t u(t',\cdot))^2_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})} dt'.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz implique que

$$I_Y(u)(t) \leq C \int_{-\infty}^{t} m(t',Y)^{2k} \|\theta_Y^w u(t',\cdot)\|_{L^2}^2 dt + C \int_{-\infty}^{t} m(t',Y)^{2k-2} \|\theta_Y^w \partial_{t'} u(t',\cdot)\|_{L^2}^2 dt'.$$

Il en résulte que

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} m(t,Y)^{2k-1} \|\theta_Y^w u(t,\cdot)\|_{L^2(\Sigma)}^2 \in L^1(dY).$$

De plus, pour tout $Y \in T^*\mathbb{R}^{n-1}$, l'application $t \to m^{k-\frac{1}{2}}(t,Y)\theta_Y^w u(t,\cdot)$ est continue. Le théorème de convergence dominée de Lebesgue conclut la démonstration.

7. Un aperçu de la preuve dans le cas des indices non entiers

L'objet de cette section est de démontrer le théorème de trace en calcul de Weyl-Hörmander suivant qui implique, en vertu de [7], le théorème 3.2.

Théorème 7.1. *Soit m un $g_{1/2,1/2}$-poids sur $T^*\mathbb{R}^n$ satisfaisant*

$$\partial_{\xi_1} m = 0, \quad \langle \xi' \rangle^{1/2} \leq m(x,\xi') \leq \langle \xi' \rangle.$$

Alors La fonction M définie par

$$M(x,\xi)^2 = \xi_1^2 + m(x,\xi')$$

est alors un $g_{1/2,1/2}$-poids. De plus, pour $s > 1/2$, l'application γ est continue surjective de $H(M^s)$ dans $H(m^{s-1/2})$.

La démonstration de ce théorème repose sur le lemme suivant :

Lemme 7.1. *La fonction M est un $\widetilde{g}$-poids.*

On peut démontrer ce lemme comme dans [7] en découpant l'espace des phases en deux zones ; l'une elliptique, l'autre dégénérée.

Démontrons tout d'abord que

$$\|\gamma(u)\|_{H(m^{s-1/2})} \leq C\|u\|_{H(M^s)}.$$

Soit $(\Phi_Y, \theta_Y)_{Y\in T^*\Sigma}$(resp. $(\varphi_{\widetilde{Y}}, \Psi_{\widetilde{Y}})_{\widetilde{Y}\in T^*\mathbb{R}^n}$), une partition de l'unité en produit de $T^*\Sigma$ (resp. de $T^*\mathbb{R}^n$). L'inégalité ci-dessus est équivalente à

$$\int_{Y\in T^*\Sigma} m^{2s-1}(Y)\|\theta_Y^{w_\Sigma}\gamma(u)\|_{L^2(\Sigma)}^2 dY \leq C^2 \int_{\widetilde{Y}\in T^*\mathbb{R}^n} M^{2s}(\widetilde{Y})\|\Psi_{\widetilde{Y}}^w u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 d\widetilde{Y}.$$

Il s'agit donc d'estimer $\|\theta_Y^{w_\Sigma}\gamma(u)\|_{L^2(\Sigma)}^2$. Pour ce faire, utilisons la partition de l'unité en produit sur $T^*\mathbb{R}^n$ et écrivons que

$$\theta_Y^{w_\Sigma}\gamma(u) = \int_{\widetilde{Y}\in T^*\mathbb{R}^n} \theta_Y^{w_\Sigma}\gamma(\varphi_{\widetilde{Y}}^w \Psi_{\widetilde{Y}}^w u) d\widetilde{Y}.$$

Le lemme clef est alors le suivant:

Lemme 7.2. *Pour tout entier N, il existe une constante C_N telle que, pour toute fonction v de $L^2(\mathbb{R}^n)$, on ait*

$$\|\theta_Y^{w_\Sigma}\gamma(\varphi_{\widetilde{Y}}^w v)\|_{L^2(\Sigma)} \leq C_N < \widetilde{\eta}' >^{1/4} \Delta(Y, \Pi(\widetilde{Y}))^{-N}(1+ < \widetilde{\eta}' > |\widetilde{y}_1|^2)^{-N}\|v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

où Π est la projection de $T^*\mathbb{R}^n$ sur $T^*\Sigma$.

Avant de démontrer ce lemme nous allons tout d'abord en déduire la première partie du théorème (la continuité de γ de $H(M^s)$ dans $H(m^{s-1/2})$). En appliquant le lemme 7.2 avec $v = \Psi^w_{\widetilde{Y}} u$, on trouve que, pour tout entier N, il existe une constante C_N telle que

$$\|\gamma(u)\|^2_{H(m^{s-1/2})} \leq C_N \int_{Y\in T^*\Sigma} m^{2s-1}(Y)$$
$$\times \left(\int_{\widetilde{Y}\in T^*\mathbb{R}^n} <\widetilde{\eta}'>^{1/4} \Delta(Y,\Pi(\widetilde{Y}))^{-N} (1+<\widetilde{\eta}>|\widetilde{y}_1|^2)^{-N} \times ||\Psi_{\widetilde{Y}} u||_{L^2(\mathbb{R}^n)} d\widetilde{Y} \right)^2 dY.$$

Le fait que M soit un $\widetilde{g}$-poids implique que, pour tout réel s, il existe une constante C et un entier N_0 tes que

$$1 \leq C(1+<\widetilde{\eta}'>|\widetilde{y}_1|^2)^{N_0} \frac{M^s(\widetilde{Y})}{M^s(0,\widetilde{y}',\widetilde{\eta}_1,\widetilde{\eta}')}.$$

D'où il vient que, pour tout entier N, il existe une constante C_N telle que

$$\|\gamma(u)\|_{H(m^{s-1/2})} \leq C_N \int_{Y\in T^*\Sigma} m^{2s-1}(Y) I_N(Y) dY,$$

avec

$$I_N(Y)^{\frac{1}{2}} = \int_{\widetilde{Y}\in T^*\mathbb{R}^n} \frac{<\widetilde{\eta}'>^{1/4} (1+<\widetilde{\eta}'>|\widetilde{y}_1|^2)^{-N}}{M^s(0,\widetilde{y}',\widetilde{\eta}_1,\widetilde{\eta}')} M^s(\widetilde{Y}) \|\Psi^w_{\widetilde{Y}} u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \Delta(Y,\Pi(\widetilde{Y})))^{-N} d\widetilde{Y}.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz pour la mesure $\Delta(Y,\Pi(\widetilde{Y}))^{-N} d\widetilde{Y}$ implique que

$$\begin{aligned} I_N(Y) &\leq J_N(Y) K_N(Y) \quad \text{avec} \\ J_N(Y) &= \int_{\widetilde{Y}\in T^*\mathbb{R}^n} \frac{<\widetilde{\eta}'>^{1/2} (1+<\widetilde{\eta}'>\widetilde{y}_1^2)^{-2N}}{M^{2s}(0,\widetilde{y}',\widetilde{\eta}_1,\widetilde{\eta}')} \Delta(Y,\Pi(\widetilde{Y}))^{-N} d\widetilde{Y} \quad \text{et} \\ K_N(Y) &= \int_{\widetilde{Y}\in T^*\mathbb{R}^n} M^{2s}(\widetilde{Y}) \|\Psi^w_{\widetilde{Y}} u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \Delta(Y,\Pi(\widetilde{Y}))^{-N} d\widetilde{Y}. \end{aligned}$$

En intégrant en $\widetilde{y}_1$ et en posant le changement de variables $Z = \Pi(\widetilde{Y})$, on trouve que

$$J_N(Y) \leq \int_{Z\in T^*\Sigma} \left(\int_{\widetilde{\eta}_1} \frac{d\widetilde{\eta}_1}{M^{2s}(0,z,\widetilde{\eta}_1,\rho)} \right) \Delta(Y,Z)^{-N} dZ.$$

Mais l'on sait que

$$M(0,z,\widetilde{\eta}_1,\zeta)^2 = \widetilde{\eta}_1^2 + m^2(z,\zeta).$$

Comme $s > \frac{1}{2}$, il résulte que

$$\int_{\widetilde{\eta}_1} \frac{1}{M^{2s}(0,z,\widetilde{\eta}_1,\zeta)} d\widetilde{\eta}_1 = \frac{c_s}{m^{2s-1}(Z)} \quad \text{avec} \quad c_s = \int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{(1+t^2)^s}.$$

Ainsi donc, on a

$$J_N(Y) \leq c_s \int_{Z\in T^*\Sigma} \frac{1}{m^{2s-1}(Z)} \Delta(Y,Z)^{-N} dZ.$$

Le fait que m soit un g-poids et le lemme 5.1 impliquent que pour N assez grand

$$J_N(Y) \leq \frac{C}{m^{2s-1}(Y)},$$

on en déduit alors que

$$\|\gamma(u)\|^2_{H(m^{s-1/2})} \leq C_N \int_{(Y,\widetilde{Y})\in T^*\Sigma\times T^*\mathbb{R}^n} \Delta(Y,\Pi(\widetilde{Y}))^{-N} M^{2s}(\widetilde{Y}) \|\Psi^w_{\widetilde{y}} u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} dY d\widetilde{Y}.$$

En intégrant en Y et en utilisant le lemme 5.1 on en déduit que

$$\|\gamma(u)\|^2_{H(m^{s-1/2})} \leq C \int_{\widetilde{Y}\in T^*\mathbb{R}^n} M^{2s}(\widetilde{Y}) \|\Psi^w_{\widetilde{Y}} u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} d\widetilde{Y}.$$

La continuité de γ est ainsi démontrée.

Pour achever la démonstration de la première partie du théorème , prouvons le lemme 7.2. Pour ce faire, commençons par calculer, pour une fonction $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, la fonction $\theta_Y^{w_\Sigma}\gamma(\varphi^w_{\widetilde{Y}} v)$. Par définition de la quantification de Weyl, on a

$$\varphi^w_{\widetilde{Y}} v(0,x') = \int_{(z_1,\xi_1)\in\mathbb{R}^2} dz_1 d\xi_1 e^{-iz_1\xi_1} \int_{Z\in T^*\Sigma} e^{i<\zeta,x'-z>} \varphi_{\widetilde{Y}}\left(\frac{z_1}{2}, \frac{x'+z}{2}, \xi_1, \zeta\right) v(z_1,z) dZ.$$

En faisant des intégrations par parties par rapport à la dérivation $< \widetilde{\eta}' >^{1/2} \partial_{\xi_1}$, qui est un vecteur de $\widetilde{g}_{\widetilde{Y}}$-longueur 1, on trouve que pour tout entier positif N,

$$\begin{aligned}\varphi^w_{\widetilde{Y}} v(0,x') = \int_{(z_1,\xi_1)\in\mathbb{R}^2} & dz_1 d\xi_1 (1+ < \widetilde{\eta}' > |z_1|^2)^{-N} e^{-iz_1\xi_1} \\ & \times \int_{Z\in T^*\Sigma} e^{i<\zeta,x'-z>} \varphi^{(N)}_{\widetilde{Y}} \left(\frac{z_1}{2}, \frac{x'+z}{2}, \xi_1, \zeta\right) v(z_1,z) dZ,\end{aligned}$$

où l'on a posé

$$\varphi^{(N)}_{\widetilde{Y}}(z_1,z,\xi_1,\zeta) = (1- < \widetilde{\eta}' > \partial^2_{\xi_1})^N \varphi_{\widetilde{Y}}(z_1,z,\xi_1,\zeta).$$

On interprète alors cette égalité en écrivant

$$\varphi^w_{\widetilde{Y}}(0,x') = \int_{(z_1,\xi_1)\in\mathbb{R}^2} (1+ < \widetilde{\eta}' > z_1^2)^{-N} e^{-iz_1\xi_1} (\varphi^{(N)}_{\widetilde{Y}}(\frac{z_1}{2}, \cdot, \xi_1, \cdot))^{w_\Sigma} v(z_1,\cdot) dz_1 d\xi_1.$$

Ainsi donc, on trouve que

$$\theta_Y^{w_\Sigma}\gamma(\varphi^w_{\widetilde{Y}} v) = \int_{\mathbb{R}^2} (1+ < \widetilde{\eta}' > |z_1|^2)^{-N} e^{-iz_1\xi_1} \left(((\theta_Y \#_{T_\Sigma} \varphi^{(N)}_{\widetilde{Y}})(\frac{z_1}{2}, \cdot, \xi_1, \cdot)\right)^{w_\Sigma} v(z_1,\cdot) dz_1 d\xi_1.$$

Par définition des semi-normes de confinement, des métriques $\widetilde{g}$ et g, on trouve que, pour tout entier k et toute fonction a de $T^*\mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}&\operatorname{conf}_{k,(\Pi(\widetilde{Y}),g\Pi(\widetilde{Y}))}(a^{(N)}(\frac{z_1}{2}, \cdot, \xi_1, \cdot)) \\ &\qquad \leq \left(1+ < \widetilde{\eta}' > \left(\frac{z_1}{2} - \widetilde{y}_1\right)^2 + \frac{(\xi_1 - \widetilde{\eta}_1)^2}{< \widetilde{\eta}' >}\right)^{-\frac{k+N}{2}} \operatorname{conf}_{k+N,(\widetilde{Y},\widetilde{g}_{\widetilde{Y}})}(a).\end{aligned}$$

Le lemme de biconfinement de Bony et Lerner implique alors que

$$\begin{aligned}&\|((\theta_Y \#_{T^*\Sigma} \varphi^N_{\widetilde{Y}})(\frac{z_1}{2}, ., \xi_1, \cdot))^{w_\Sigma} v(z_1,\cdot)\|_{L^2(\Sigma)} \\ &\qquad \leq C_N \left(1+ < \widetilde{\eta}' > \left(\frac{z_1}{2} - \widetilde{y}_1\right)^2 + \frac{(\xi_1 - \widetilde{\eta}_1)^2}{< \widetilde{\eta}' >}\right)^{-N} \|v(z_1,\cdot)\|_{L^2(\Sigma)} \Delta(Y, \Pi(\widetilde{Y}))^{-N}.\end{aligned}$$

Il en résulte que, pour tout entier N,

$$\begin{aligned}||\theta_Y^{w_\Sigma}\gamma(\varphi^w_{\widetilde{y}} v)||_{L^2(\Sigma)} \leq & C_N \Delta(Y, \Pi(\widetilde{Y}))^{-N} \int_{\mathbb{R}^2} (1+ < \widetilde{\eta}' > |z_1|^2)^{-N} \\ & \times \left(1+ < \widetilde{\eta}' > \left(\frac{z_1}{2} - \widetilde{y}_1\right)^2 + \frac{(\xi_1 - \widetilde{\eta}_1)^2}{< \widetilde{\eta}' >}\right)^{-N} ||v(z_1,\cdot)||_{L^2(\Sigma)} dz_1 d\xi_1.\end{aligned}$$

L'inégalité triangulaire implique que

$$||\theta_Y^{w_\Sigma}\gamma(\varphi_{\widetilde{y}}^w v)||_{L^2(\Sigma)} \leq C_N \Delta(Y, \Pi(\widetilde{y}))^{-N}(1+ < \widetilde{\eta}' > |\widetilde{y}_1^2|)^{-N}$$
$$\times \int_{\mathbb{R}^2} (1+ < \widetilde{\eta}' > |z_1|^2)^{-1}\left(1 + \frac{(\xi_1 - \widetilde{\eta}_1)^2}{< \widetilde{\eta}' >}\right)^{-1} ||v(z_1, \cdot)||_{L^2(\Sigma) dz_1 d\xi_1}.$$

Par intégration en ξ_1, il vient

$$||\theta_Y^{w_\Sigma}\gamma(\varphi_{\widetilde{Y}}^w v)||_{L^2(\Sigma)} \leq C_N \Delta(Y, \Pi(\widetilde{Y}))^{-N}(1+ < \widetilde{\eta}' > |\widetilde{y}_1|^2)^{-N}$$
$$\times < \widetilde{\eta}' >^{1/2} \int_{I\!R} (1+ < \widetilde{\eta}' > |z_1|^2)^{-1} ||v(z_1, \cdot)||_{L^2(dz_1)}.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz implique que

$$\int_{\mathbb{R}} (1+ < \widetilde{\eta} >' z_1^2)^{-1} ||v(z_1, \cdot)||_{L^2(\Sigma)} dz_1 \leq C < \widetilde{\eta}' >^{-1/4} ||v||_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

ce qui assure le lemme.

En ce qui concerne la seconde partie du théorème, c'est-à-dire la surjectivité de γ, nous nous sommes inspirés directement de la formule classique de relèvement utilisée dans le cadre des espaces de Sobolev usuels ; cette formule repose sur un calcul explicite en variables de Fourier. En effet, si v appartient à $H^{s-\frac{1}{2}}$, alors, si l'on pose

$$u = (2\pi)^{-(n-1)} c_s \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{(1 + |\xi'|^2)^{s-1/2}}{(1 + |\xi|^2)^s)} \widehat{v}(\xi')\right).$$

Il est alors clair que $\gamma(u) = v$ et

$$||u||_{H^s} \leq c||v||_{H^{s-1/2}}.$$

Dans notre cadre, il s'agit de remplacer $1 + |\xi'|$ et $1 + |\xi|$ par les poids convenables du calcul de Weyl-Hörmander, ce qui se fait grâce à la formule suivante :

Soit χ une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ valant 1 près de 0, on pose, pour $v \in \mathcal{S}(\Sigma)$,

$$(R_\chi v)(x_1, x') = \int_{T^*\Sigma} \mu(x_1)(\Phi_Y \#_{T^*\Sigma} \theta_Y)^{w_\Sigma} v(x') dY, \tag{7.2}$$

où

$$\mu_Y(x_1) = c_s^{-1} m(Y)^{2s-1} \chi(x_1 < \eta >^{1/2}) \int_{\mathbb{R}} e^{ix_1\xi_1} M^{-2s}(0, y, \xi_1, \eta) d\xi_1.$$

Comme $M^2(0, y, \xi_1, \eta) = \xi_1^2 + m^2(y, \eta)$ et comme $\chi(0) = 1$, on a $\gamma o R_\chi = Id$. La continuité de R_χ de $H(m^{s-1/2})$ dans $H(M^s)$ découle du lemme clef suivant :

Lemme 7.3. *Pour tout entier N, il existe une constante C telle que, pour toute fonction f de $L^2(\Sigma)$, on ait*

$$||\Psi_{\widetilde{Y}}^w(\mu_Y(x_1)\Phi_Y^{w_\Sigma} f)||_{L^2(I\!R^n)} \leq C\Delta(Y, \Pi(\widetilde{Y}))^{-N} \frac{m^{2s-1}(Y)}{M^s(\widetilde{Y})}$$
$$\times < \eta >^{-1/4} (1+ < \eta > \widetilde{y}_1^2)^{-1} J_Y(\widetilde{\eta}_1) ||f||_{L^2(\Sigma)},$$

où J_Y est une fonction de la variable réelle telle que

$$\int_{\mathbb{R}} J_Y^2(\tau) d\tau \leq C \frac{< \tau >}{m^{2s-1}(Y)}.$$

Pour la démonstration de ce lemme, nous renvoyons le lecteur [3]. On montre maintenant ce lemme implique le théorème principal.

En effet, en appliquant le lemme ci-dessus avec $f = \theta^w_Y v$, on obtient

$$||\Psi_{\widetilde{Y}} R_\chi v||_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq CM^{-s}(\widetilde{y}) \int_{T^*\Sigma} <\eta>^{-1/4} (1+<\eta> \widetilde{y}_1^2)^{-1} \times J_Y(\widetilde{\eta}_1) ||\theta^{w_\Sigma}_Y v||_{L^2(\Sigma)} \Delta(Y, \Pi(\widetilde{Y}))^{-N} m^{2s-1}(Y) dY.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz pour la mesure $\Delta(Y, \Pi(\widetilde{Y}))^{-N} m^{2s-1}(Y)dY$ implique que

$$||\Psi^w_{\widetilde{Y}} R_\chi v||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq CM^{-2s}(\widetilde{Y}) \int_{T^*\Sigma} m^{2s-1}(Y) ||\theta^{w_\Sigma}_Y v||^2_{L^2(\Sigma)} \Delta(Y, \Pi(\widetilde{Y}))^{-N} dY \times \int_{T^*\Sigma} <\eta>^{-1/2} (1+<\eta> \widetilde{y}_1^2)^{-2} J^2_Y(\widetilde{\eta}_1) \Delta(Y, \Pi(\widetilde{Y}))^{-N} m^{2s-1}(Y) dY.$$

Par définition de la norme sur l'espace $H(M^s)$, on en déduit alors que

$$\begin{aligned} ||R_\chi v||^2_{H(M^s)} &\leq \int_{Z \in T^*\Sigma} F_1(Z) F_2(Z) dZ \quad \text{avec} \\ F_1(Z) &= \int_{T^*\Sigma} ||\theta^{w_\Sigma}_Y v||^2_{L^2(\Sigma)} \Delta(Y, Z)^{-N} m^{2s-1}(Y) dY \quad \text{et} \\ F_2(Z) &= \int_{T^*\Sigma} <\eta>^{-1/2} \int_{\mathbb{R}^2} (1+<\eta> t^2)^{-2} J^2_Y(\tau) \Delta(Y, Z)^{-N} m^{2s-1}(Y) dt d\tau dY. \end{aligned}$$

Or, on a

$$\int_{\mathbb{R}^2} (1+<\eta> t^2)^{-2} J^2_Y(\tau) dt d\tau \leq C \frac{<\eta>^{1/2}}{m^{2s-1}(Y)}.$$

Le lemme 4.2 implique alors que la fonction F_2 est bornée sur $T^*\Sigma$. En appliquant à nouveau le lemme 5.1, on trouve que

$$||R_\chi v||_{H(M^s)} \leq C ||v||_{H(m^{s-1/2})}.$$

Le lemme 7.3 implique donc bien le théorème.

Références

[1] H. Bahouri, P. Grard, et C.-J. Xu, Espaces de Besov et estimations de Strichartz généralisées sur le groupe de Heisenberg, *Sminaire EDP de l'École Polytechnique, 1997–1998.*

[2] H. Bahouri et I. Gallagher, Paraproduit sur le groupe de Heisenberg et applications, *à paratre dans Revista Mathemàtica Ibero-Americana.*

[3] H. Bahouri, J.-Y. Chemin et C.-J. Xu, Problme de trace, systmes sous-elliptiques et groupe d'Heisenberg, *manuscript en prparation.*

[4] S. Berhanu, I. Pesenson, The trace problem for vector field satisfying Hörmander's condition, *Mathematische Zeitschrift*, **231**, 1999, pages 103-122.

[5] J.-M. Bony et J.-Y. Chemin, Espaces fonctionnels associés au calcul de Weyl-Hörmander, *Bulletin de la Société Mathématique de France*, **122**, 1994, pages 77–118.

[6] J.-M. Bony et N. Lerner, Quantification asymptotique et microlocalisation d'ordre supérieur, *Annales de l'École Normale Supérieure*, **22**, 1989, pages 377–433.

[7] C. E. Cancelier, J.-Y. Chemin et C.-J. Xu, Calcul de Weyl-Hörmander et opérateurs sous-elliptiques, *Annales de l'Institut Fourier*, **43**, 1993, pages 1157–1178.

[8] J.-Y. Chemin et C.-J. Xu, Inclusions de Sobolev en calcul de Weyl-Hörmander et systèmes sous-elliptiques, *Annales de l'École Normale Supérieure*, **30**, 1997, pages 719–751.

[9] D. Danielli, N. Garofalo, D-N. Nhieu, Trace inequalities for Carnot-Carathédory spaces and applications, *Annali della Scuola Normale di Pisa* , **27**, 1998, pages 195-252.

[10] L. Hörmander, *The analysis of linear partial differential equations*, tome 3, Springer Verlag, 1985.

[11] D. Jerison, The Poincaré inequality for vector fields satisfying Hörmander's conditions. *Duke Mathematical Journal*, **53**, 1986, pages 503–523.

[12] N. Lerner, Sur les espaces de Sobolev généraux associés aux classes récentes d'opérateurs pseudo-différentiels, *Notes aux Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, **289**, 1979, pages 663–666.

[13] D. M. Nhieu, Extension fo Sobolev spaces on the Heisenberg group, *C. R. Acad. Sci. Paris, t. 321, Série I*, 1995, pages 1559-1564.

[14] I. Pesenson, The trace Problem and Hardy operator for non-isotropic function spaces on the Heisenberg group, *Communications in Partial Differential Equations*, **19**, 1994, pages 655-976.

[15] L. Rothschild et E. Stein, Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups, *Acta Mathematica*, **137**, 1977, pages 247–320.

[16] E.M. Stein, *Harnomic Analysis*, Princeton University Press, 1993.

[17] C.-J. Xu et X. Zhu, On the inverse of a class of degenerate elliptic operators, *Chinese Journal Contemporary Mathematics*, **16**, 1995, pages 256–274.

Hajer BAHOURI
Université de Tunis, Département de Mathématiques
1060 Tunis, Tunisie
Hajer.Bahouri@fst.rnu.tn

Jean-Yves CHEMIN
Université Pierre-et-Marie-Curie, Analyse numérique
4, place Jussieu, 75230 Paris Cedex 05, France
chemin@ann.jussieu.fr

Chao-Jiang XU
Université de Rouen, UPRES-A6085, Mathématiques
76821 Mont-Saint-Aignan, France
Chao-Jiang.Xu@univ-rouen.fr
et
Université de Wuhan, Institut de Mathématiques
430072, Wuhan, Chine