Théorie spectrale des opérateurs unitaires

19 mai 2003

Le cadre dans lequel on se place ici est celui d'un espace de Hilbert H, séparable, sur lequel agit un opérateur unitaire U (*i.e.* U est une bijection linéaire de H sur H qui conserve le produit scalaire). En théorie ergodique, on rencontre cette situation lorsque $H = L^2(X, \mathscr{A}, \mu)$, où $(X, \mathscr{A}, \mu)$ est un espace de Lebesgue, et $U = U_T \ : \ f \longmapsto f \circ T$ avec $T \in \mathrm{Aut}((X, \mathscr{A}, \mu))$. C'est en ayant à l'esprit cette interprétation que l'on va étudier certaines propriétés de U ; mais les résultats présentés ici restent valables en dehors de ce cadre ergodique.

1 Mesures spectrales

1.1 Mesure spectrale d'un élément de H

Théorème 1.1 *Soit f un élément de H. Alors il existe une unique mesure positive finie σ_f sur $]-\pi, \pi]$ telle que l'on ait*

$$\forall p \in \mathbb{Z}, \quad \langle f \, , \, U^p f \rangle \ = \ \widehat{\sigma_f}(p) \ = \ \int_{]-\pi,\pi]} e^{-ipt} \, d\sigma(t). \tag{1}$$

Preuve — Pour tout entier $N \geq 1$, on définit une mesure ν_N sur $]-\pi, \pi]$ par sa densité par rapport à λ (mesure de Lebesgue normalisée) :

$$\frac{d\nu_N}{d\lambda}(\theta) \ \stackrel{\text{déf}}{=} \ \left\| \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N} e^{ij\theta} U^{-j} f \right\|^2 \ = \ \frac{1}{N} \sum_{j,k=0}^{N} e^{i(j-k)\theta} \left\langle U^{-j} f \, , \, U^{-k} f \right\rangle .$$

Pour tout $p \in \mathbb{Z}$, le coefficient de Fourrier $\widehat{\nu_N}(p)$ vaut alors

$$\widehat{\nu_N}(p) \ = \ \frac{1}{N} \sum_{\substack{0 \leq j,k \leq N \\ j-k=p}} \left\langle f \, , \, U^{j-k} f \right\rangle \ = \ \frac{N-p}{N} \left\langle f \, , \, U^p f \right\rangle .$$

On a ainsi pour tout $p \in \mathbb{Z}$

$$\widehat{\nu_N}(p) \ \xrightarrow[N \to +\infty]{} \ \left\langle f \, , \, U^p f \right\rangle .$$

Or, par compacité la suite (ν_N) a au moins une valeur d'adhérence. Ce qui précède prouve qu'elle n'en a qu'une, que l'on note σ_f, et qui vérifie (1). ❑

Définition 1.2 *On appelle* mesure spectrale de f *la mesure σ_f définie par (1)*

Remarquons déjà que la masse totale de σ_f est donnée par

$$\sigma_f(]-\pi,\pi]) \;=\; \int_{]-\pi,\pi]} 1\, d\sigma_f \;=\; \langle f\,,\,f\rangle \;=\; \|f\|^2 .$$

Regardons maintenant un exemple important : celui où f est un vecteur propre de U, associé à une valeur propre α. Comme U est un opérateur unitaire, $|\alpha| = 1$, et on peut donc écrire $\alpha = e^{i\theta}$, avec $\theta \in]-\pi,\pi]$. On a ensuite, pour tout $p \in \mathbb{Z}$,

$$\langle U^p f\,,\,f\rangle \;=\; e^{ip\theta}\,\langle f\,,\,f\rangle \;=\; \|f\|^2 \int_{]-\pi,\pi]} e^{ipt}\, d\delta_\theta(t),$$

où δ_θ est la masse de Dirac en θ. Ainsi, on a dans ce cas $\sigma_f = \|f\|^2\,\delta_\theta$.

Un autre exemple classique consiste à regarder le cas où les vecteurs $(U^p f)_{p\in\mathbb{Z}}$ forment un système orthonormal. Les coefficients de Fourier de la mesure spectrale σ_f sont alors tous nuls, sauf celui d'indice 0 qui vaut 1. La mesure spectrale de f est dans ce cas la mesure de Lebesgue.

1.2 Correspondance entre l'espace cyclique engendré par f et $L^2(\sigma_f)$

Pour $f \in H$, on note $S(f)$ l'espace cyclique engendré par f, c'est-à-dire le plus petit sous-espace vectoriel fermé de H qui contient tous les $U^p f$, $p \in \mathbb{Z}$. On cherche maintenant à construire une isométrie Φ_f entre $S(f)$ et $L^2(\sigma_f)$, en faisant correspondre, pour tout entier $p \in \mathbb{Z}$, $e^{ip\cdot}$ à $U^p f$. Remarquons tout d'abord que, grâce à la définition de σ_f, $g \in S(f)$ défini par $g \overset{\text{déf}}{=} \sum_1^n a_j U^{p_j} f$, et l'élément φ de $L^2(\sigma_f)$ défini par $\varphi \overset{\text{déf}}{=} \sum_1^n a_j e^{ip_j\cdot}$ vérifient $\|g\| = \|\varphi\|$. En particulier, si g est nul (ce qui ne veut pas forcément dire que tous les a_j sont nuls), φ est nul aussi. Ceci permet donc de définir sans ambiguïté

$$\Phi_f\Big(\sum_1^n a_j U^{p_j} f\Big) \;\overset{\text{déf}}{=}\; \sum_1^n a_j e^{ip_j\cdot}.$$

Φ_f est alors une application linéaire de l'espace vectoriel engendré par les $U^p f$ sur le sous-espace vectoriel de $L^2(\sigma_f)$ engendré par les $e^{ip\cdot}$, qui conserve la norme. Comme, d'un côté, l'espace engendré par les $U^p f$ est (par définition) dense dans $S(f)$, et de l'autre celui engendré par les applications $e^{ip\cdot}$ est dense dans $L^2(\sigma_f)$, Φ_f se prolonge aisément en une application bijective isométrique de $S(f)$ sur $L^2(\sigma_f)$. On notera désormais $g \overset{f}{\longleftrightarrow} \varphi$ pour $\varphi = \Phi_f(g)$. On a ainsi $f \overset{f}{\longleftrightarrow} 1$, et pour tout $p \in \mathbb{Z}$, $U^p f \overset{f}{\longleftrightarrow} e^{ip\cdot}$. En général, on montre facilement que si $g \overset{f}{\longleftrightarrow} \varphi$, alors pour tout $p \in \mathbb{Z}$ on a $U^p g \overset{f}{\longleftrightarrow} e^{ip\cdot}\varphi$. L'action de U^p sur $S(f)$ correspond donc par Φ_f à la multiplication par $e^{ip\cdot}$ dans $L^2(\sigma_f)$.

On donne maintenant quelques propriétés concernant les espaces cycliques $S(f)$ et les espaces $L^2(\sigma_f)$ correspondants. Les symboles f, g, h désignent toujours des éléments de H.

Proposition 1.3 *Si ρ est une mesure positive finie sur $]-\pi,\pi]$ telle que $\rho \ll \sigma_f$, alors il existe $g \in S(f)$ tel que $\sigma_g = \rho$.*

Preuve — Posons $\varphi \stackrel{\text{déf}}{=} \sqrt{\frac{d\rho}{d\sigma_f}}$. Alors $\varphi \in L^2(\sigma_f)$, et il existe donc $g \in S(f)$ tel que $g \stackrel{f}{\longleftrightarrow} \varphi$. On a alors, puisque Φ_f conserve le produit scalaire, pour tout entier p

$$\langle U^p g\,,\, g\rangle_H \;=\; \left\langle e^{ip\cdot}\varphi\,,\, \varphi\right\rangle_{\sigma_f} \;=\; \int_{]-\pi,\pi]} e^{ipt}\left(\sqrt{\frac{d\rho}{d\sigma_f}}\right)^2 d\sigma_f(t) \;=\; \int_{]-\pi,\pi]} e^{ipt}\, d\rho(t).$$

On a donc bien $\sigma_g = \rho$. ❑

Proposition 1.4 *Si $g \in S(f)$, alors $\sigma_g \ll \sigma_f$. De plus, soit φ tel que $g \stackrel{f}{\longleftrightarrow} \varphi$, alors*

$$\frac{d\sigma_g}{d\sigma_f} \;=\; |\varphi|^2\,.$$

Preuve — Pour tout $p \in \mathbb{Z}$, on a

$$\int_{]-\pi,\pi]} e^{ipt}\, d\sigma_g(t) \;=\; \langle U^p g\,,\, g\rangle_H \;=\; \left\langle e^{ip\cdot}\varphi\,,\, \varphi\right\rangle_{\sigma_f} \;=\; \int_{]-\pi,\pi]} e^{ipt}\,|\varphi|^2\, d\sigma_f.$$

❑

Lemme 1.5 *Soit $g \in S(f)$, et $\varphi \in L^2(\sigma_f)$ tel que $g \stackrel{f}{\longleftrightarrow} \varphi$. Soit $h \in S(g)$, et $\psi \in L^2(\sigma_g)$ tel que $h \stackrel{g}{\longleftrightarrow} \psi$. Alors $h \in \mathscr{S}(f)$, $\psi\varphi \in L^2(\sigma_f)$, et $h \stackrel{f}{\longleftrightarrow} \psi\varphi$.*

Preuve — Il est évident que $S(g) \subset S(f)$, donc $h \in S(f)$. Par la proposition 1.4, on a immédiatement

$$\int_{]-\pi,\pi]} |\psi\varphi|^2\, d\sigma_f \;=\; \int_{]-\pi,\pi]} |\psi|^2\, d\sigma_g \;<\; +\infty,$$

d'où $\psi\varphi \in L^2(\sigma_f)$. Pour montrer que $h \stackrel{f}{\longleftrightarrow} \psi\varphi$, on considère le cas où ψ est une combinaison linéaire de $e^{ip\cdot}$, puis on passe à la limite… ❑

Lemme 1.6 *Soit $g \in S(f)$, et $\varphi \in L^2(\sigma_f)$ tel que $g \stackrel{f}{\longleftrightarrow} \varphi$. On considère l'ensemble*

$$A \;\stackrel{\text{déf}}{=}\; \{t \in]-\pi,\pi] \;/\; \varphi(t) \neq 0\}\,.$$

(Cet ensemble n'est défini qu'à un ensemble σ_f-négligeable près, mais cela n'a pas d'importance ici.) Alors

$$S(g) \;\stackrel{f}{\longleftrightarrow}\; L^2(A,\sigma_f) \;\stackrel{\text{déf}}{=}\; \left\{\psi \in L^2(\sigma_f) \;/\; \psi = \mathbb{1}_A\psi \;\; \sigma_f\text{-p.s.}\right\}.$$

Preuve — Soit $h \in S(g)$, et soit $\psi \in L^2(\sigma_f)$ tel que $h \stackrel{f}{\longleftrightarrow} \psi$. Par la proposition 1.4, on a $\sigma_h \ll \sigma_g$, et comme

$$\sigma_g(]-\pi,\pi] \setminus A) \;=\; \int_{]-\pi,\pi]\setminus A} |\varphi|^2\, d\sigma_f \;=\; 0,$$

on a aussi

$$\sigma_h(]-\pi,\pi]\setminus A) \;=\; \int_{]-\pi,\pi]\setminus A} |\psi|^2\, d\sigma_f \;=\; 0,$$

et donc $\psi \in L^2(A,\sigma_f)$.

Réciproquement, soit $\psi \in L^2(A,\sigma_f)$. Alors la fonction ψ/φ est dans $L^2(\sigma_g)$, car en utilisant à nouveau la proposition 1.4 on obtient

$$\int_{]-\pi,\pi]} \left|\frac{\psi}{\varphi}\right|^2 d\sigma_g \;=\; \int_{]-\pi,\pi]} |\psi|^2\, d\sigma_f \;<\; \infty.$$

Il existe donc $h \in S(g)$ tel que $h \overset{g}{\longleftrightarrow} \psi/\varphi$. On a alors, d'après le lemme 1.6, $h \overset{f}{\longleftrightarrow} (\psi/\varphi)\varphi = \psi$.

❑

Proposition 1.7 *Soient g et h dans un même espace cyclique $S(f)$. Alors $S(g) = S(h)$ si et seulement si $\sigma_g \sim \sigma_h$.*

Preuve — Soient φ et ψ définis dans $L^2(\sigma_f)$ par $g \overset{f}{\longleftrightarrow} \varphi$, et $h \overset{f}{\longleftrightarrow} \psi$. Puis, soient $A, B \subset\,]-\pi,\pi]$ définis par

$$A \overset{\text{déf}}{=} \{t \in]-\pi,\pi] \;/\; \varphi(t) \neq 0\},$$
$$B \overset{\text{déf}}{=} \{t \in]-\pi,\pi] \;/\; \psi(t) \neq 0\}.$$

On a, d'après le lemme 1.6 et la proposition 1.4

$$[S(g) = S(f)] \iff [A = B \;\sigma_f\text{-p.s.}] \iff [\sigma_g \sim \sigma_h].$$

❑

Proposition 1.8 *Soient g et h dans un même espace cyclique $S(f)$. Alors $S(g) \perp S(h)$ si et seulement si σ_g et σ_h sont étrangères.*

Preuve — Par le lemme 1.6, on peut trouver deux ensembles mesurables A et B dans $]-\pi,\pi]$ tels que $S(g) \overset{f}{\longleftrightarrow} L^2(A,\sigma_f)$ et $S(h) \overset{f}{\longleftrightarrow} L^2(B,\sigma_f)$. Supposons $S(g) \perp S(h)$, alors $L^2(A,\sigma_f) \perp L^2(B,\sigma_f)$ et donc $\mathbb{1}_{A\cap B} = 0$ dans $L^2(\sigma_f)$. On peut donc supposer $A \cap B = \emptyset$. Mais σ_g est portée par A, et σ_h par B, d'où $\sigma_g \perp \sigma_g$.

Pour la réciproque, on n'a pas besoin de supposer que g et h sont dans un même espace cyclique, comme le montre la proposition suivante.

Proposition 1.9 *Supposons σ_g et σ_h étrangères. Alors $S(g) \perp S(h)$,* même si g et h ne sont pas contenus dans un même $S(f)$.

Preuve — Posons $h = h_1 + h_2$, où $h_1 \in S(g)$ et $h_2 \perp S(g)$ (d'où $S(h_2) \perp \mathscr{S}(g)$). Pour tout entier p, on a alors

$$\begin{aligned}
\int_{]-\pi,\pi]} e^{ipt}\, d\sigma_h(t) &= \langle U^p h\,,\, h\rangle \\
&= \langle U^p h_1\,,\, h_1\rangle + \langle U^p h_2\,,\, h_2\rangle \\
&= \int_{]-\pi,\pi]} e^{ipt}\, d\sigma_{h_1}(t) + \int_{]-\pi,\pi]} e^{ipt}\, d\sigma_{h_2}(t),
\end{aligned}$$

d'où $\sigma_h = \sigma_{h_1} + \sigma_{h_2}$. On a en particulier $\sigma_{h_1} \ll \sigma_h$, et donc $\sigma_{h_1} \perp \sigma_g$. Mais, par ailleurs, $h_1 \in S(g)$ et donc d'après la proposition 1.3, $\sigma_{h_1} \ll \sigma_g$. On a donc forcément $\sigma_{h_1} = 0$, c'est-à-dire $h = h_2 \perp S(g)$. ❑

On a montré au passage que si $S(f) \perp S(g)$, alors $\sigma_{f+g} = \sigma_f + \sigma_g$. Il n'est pas difficile de généraliser ce résultat à une famille dénombrable sommable d'éléments de H, d'où la proposition suivante.

Proposition 1.10 *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'éléments de H vérifiant*

1. *si $n \neq m$, alors $S(f_n) \perp S(f_m)$,*
2. *$\sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|^2 < +\infty$.*

Alors, en posant $f \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$, on a

$$\sigma_f = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sigma_{f_n}.$$

Si l'hypothèse d'orthogonalité des sous-espaces cycliques est levée, on obtient simplement l'absolue continuité.

Proposition 1.11 *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'éléments de H vérifiant*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|^2 < +\infty.$$

Alors, en posant $f \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$, on a

$$\sigma_f \ll \sum_{n\in\mathbb{N}} \sigma_{f_n}.$$

Preuve — On se ramène au cas de la proposition 1.10 par un procédé du type "orthogonalisation de Schmidt" : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on écrit $f_n = f'_n + f''_n$, où

- $f_0 = f''_0$ ($f'_0 = 0$),
- $f'_{n+1} \in \bigoplus_{i\leq n} S(f''_i)$,
- $f''_{n+1} \perp \bigoplus_{i\leq n} S(f''_i)$.

Alors les $S(f''_n)$ sont deux à deux orthogonaux, et on a pour tout n, $f_n \in \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} S(f''_n)$, d'où aussi $f \in \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} S(f''_n)$. Ainsi, f s'écrit $f = \sum_n g''_n$, où $g''_n \in S(f''_n)$. Mais alors, par la proposition 1.10,

$$\sigma_f = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sigma_{g''_n} \ll \sum_{n\in\mathbb{N}} \sigma_{f''_n} \ll \sum_{n\in\mathbb{N}} \sigma_{f_n}$$

(car $\sigma_{f_n} = \sigma_{f'_n} + \sigma_{f''_n}$). ❑

Corollaire 1.12 *Si D est une partie dense dans H, et σ une mesure finie sur $]-\pi, \pi]$ vérifiant $\sigma_f \ll \sigma$ pour tout $f \in D$, alors $\sigma_f \ll \sigma$ pour tout $f \in H$.*

Preuve — On peut construire une famille $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ orthonormale, où chaque f_n est dans l'espace vectoriel engendré par D (donc vérifie $\sigma_{f_n} \ll \sigma$), et telle que l'espace vectoriel engendré par les f_n soit aussi dense dans H. Mais alors chaque f de H peut s'écrire $f = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n f_n$ avec $\sum |a_n|^2 < \infty$, d'où

$$\sigma_f \ll \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \sigma_{f_n} \ll \sigma.$$

❑

2 Type spectral maximal

2.1 Type spectral maximal d'un opérateur unitaire

Définition 2.1 *Soit $f \in H$. On dit que f est* de type spectral maximal *si pour tout $g \in H$, $\sigma_g \ll \sigma_f$.*

Proposition 2.2 *Il existe toujours au moins un f dans H qui soit de type spectral maximal.*

Preuve — On se donne une famille dénombrable (f_n) dense dans H. En effectuant à partir de cette famille le procédé d'orthogonalisation décrit dans la proposition 1.11, on obtient une famille (f_n'') telle que les espaces cycliques $S(f_n'')$ soient deux à deux orthogonaux, et telle que $H = \bigoplus S(f_n'')$.

On peut ensuite trouver une suite (a_n) de réels tous strictement positifs, avec $\sum a_n^2 = 1$. On pose alors

$$f \stackrel{\text{déf}}{=} \sum a_n f_n.$$

Il reste à montrer que f est de type spectral maximal. Comme les $S(f_n)$ sont deux à deux orthogonaux, la mesure spectrale de f est

$$\sigma_f = \sum a_n^2 \sigma_{f_n}.$$

Puis, tout $g \in H$ s'écrit $\sum g_n$ avec $g_n \in S(f_n'')$, d'où

$$\sigma_g = \sum \sigma_{g_n} \ll \sum a_n^2 \sigma_{f_n} = \sigma_f.$$

❑

Il est clair que si f et g sont deux éléments de type spectral maximal, alors $\sigma_f \sim \sigma_g$. On appelle *type spectral maximal de U* la classe d'équivalence de σ_f, pour un f de type spectral maximal.

2.2 Type spectral maximal d'un automorphisme d'un espace de Lebesgue

On se place à nouveau dans le cadre de l'étude d'un automorphisme T de l'espace de Lebesgue $(X, \mathscr{A}, \mu)$. Comme on sait que toutes les fonctions constantes sont invariantes par U_T, l'étude spectrale de U_T n'a d'intérêt que sur l'orthogonal du sous-espace des fonctions constantes, c'est-à-dire sur

$$L_0^2(\mu) \stackrel{\text{déf}}{=} \left\{ f \in L^2(\mu) \Big/ \int_X f\, d\mu = 0 \right\}.$$

On définit alors le type spectral maximal de T comme étant *le type spectral maximal de la restriction de U_T à $L_0^2(\mu)$.*

La connaissance du type spectral maximal de T permet de déterminer quelques-unes des propriétés du système ; la propposition qui suit, par exemple, montre que l'ergodicité se voit sur le type spectral maximal de T. Mais on verra aussi que d'autres propriétés comme le mélange par exemple se caractérisent en termes de type spectral maximal.

Proposition 2.3 *Le système dynamique $(X, \mathscr{A}, \mu, T)$ est ergodique si et seulement si le type spectral maximal de T ne charge pas $\{0\}$.*

Preuve — Laissée en exercice…

Voyons un exemple dans lequel il est facile de déterminer le type spectral maximal de T.

type spectral maximal d'une rotation

Ici, X est le tore $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ muni de ma mesure de Lebesgue, et la transformation est $T = R_\alpha \,:\, x \longmapsto x + \alpha \pmod 1$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Les fonctions $f_p \,:\, x \longmapsto \exp(i2\pi px)$, $p \in \mathbb{Z}^*$ forment alors une famille orthonormale engendrant un sous-espace dense dans L_0^2. Or, la mesure spectrale de chaque f_p est facile à déterminer : f_p est une fonction propore de U_T associée à la valeur propre $\exp(i2\pi p\alpha)$. On a donc

$$\sigma_{f_p} \;=\; \delta_{2\pi p\alpha}.$$

Le corollaire 1.12 permet d'en déduire que tout $f \in L_0^2$ a une mesure spectrale absolument continue par rapport à $\sum_{p\in\mathbb{Z}^*} \delta_{2\pi p\alpha}$. Par ailleurs, les propositions 1.9 et 1.10 assurent que si l'on pose

$$f \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{p\in\mathbb{Z}^*} 2^{-|p|} f_p,$$

alors

$$\sigma_f \;=\; \sum_{p\in\mathbb{Z}^*} 2^{-2|p|} \delta_{2\pi p\alpha},$$

ce qui prouve que $\sum_{p\in\mathbb{Z}^*} \delta_{2\pi p\alpha}$ est le type spectral maximal de la rotation. On dit que la rotation est *à spectre discret* : son type spectral maximal est purement atomique.

La proposition 2.3 perme de retrouver la condition d'ergodicité d'une rotation que l'on connaissait déjà : d'après cette proposition, la rotation est ergodique si et seulement si 0 ne peut pas s'écrire sous la forme $2\pi p\alpha \pmod{2\pi}$ avec un entier $P \neq 0$ c'est-à-dire si et seulement si $\alpha \notin \mathbb{Q}$.