

# Mélange fort, mélange faible

## 1 Le mélange fort

Commençons par rappeler la définition d'un système mélangeant.

**Définition 1.1** *Le système dynamique  $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$  est dit mélangeant si pour tous  $A$  et  $B$  dans  $\mathcal{A}$ ,*

$$\mu(A \cap T^{-j}B) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mu(A)\mu(B). \quad (1)$$

*Remarque* : on dit aussi *fortement* mélangeant, par opposition avec une propriété plus faible qui sera présentée un peu plus tard.

### 1.1 Voir le mélange en regardant l'action de $U_T$ sur $L^2$

Tout comme pour l'ergodicité, il suffit de connaître l'action de  $U_T$  sur  $L^2(\mu)$  pour savoir si  $T$  est mélangeant ou non.

**Proposition 1.2** *Soit  $T$  un automorphisme de l'espace de Lebesgue  $(X, \mathcal{A}, \mu)$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

- (1)  $T$  est fortement mélangeant.
- (2) Pour tous  $f$  et  $g$  dans  $L^2(\mu)$ ,

$$\langle f, U_T^n g \rangle \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \langle f, 1 \rangle \langle 1, g \rangle = \int f d\mu \int \bar{g} d\mu.$$

- (3) Pour tout  $f \in L^2(\mu)$ ,

$$\langle f, U_T^n f \rangle \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \langle f, 1 \rangle \langle 1, f \rangle = \left( \int f d\mu \right)^2.$$

**Preuve** — (2)  $\implies$  (1) car il suffit d'appliquer (2) à  $f = \mathbb{1}_A$  et  $g = \mathbb{1}_B$  pour  $A$  et  $B$  dans  $\mathcal{A}$ .

(1)  $\implies$  (3) car on déduit facilement de (1) la validité de (3) lorsque  $f$  est une fonction simple. Par ailleurs, un petit calcul montre que l'ensemble des  $f \in L^2(\mu)$  qui vérifient (3) est fermé dans  $L^2$ ; comme l'ensemble des fonctions simples est dense dans  $L^2$ , on obtient bien (3) pour tout  $f \in L^2$ .

(3)  $\implies$  (2) : pour  $f \in L^2(\mu)$ , notons  $H_f$  le plus petit sous-espace vectoriel fermé de  $L^2(\mu)$  contenant 1 et les  $U_T^n f$ ,  $n \geq 0$ . Alors l'ensemble

$$F_f \stackrel{\text{déf}}{=} \left\{ g \in L^2 \mid \langle U_T^n f, g \rangle \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \langle f, 1 \rangle \langle 1, g \rangle \right\}$$

est un sous-espace vectoriel fermé de  $L^2$ , qui contient 1,  $f$  (à cause de (3)), et même tous les  $U_T^n f$ ,  $n \geq 0$ . On a donc  $H_f \subset F_f$ . Par ailleurs, si  $g$  est orthogonal à  $H_f$ , on a pour tout  $n \geq 0$ ,

$\langle U_T^n f, g \rangle = 0$  et  $\langle g, 1 \rangle = 0$ , d'où aussi  $g \in F_f$ . Ainsi,  $F_f$  contient à la fois  $H_f$  et  $H_f^\perp$ , d'où  $F_f = L^2(\mu)$ .  $\square$

## 1.2 Caractérisation du mélange par le type spectral maximal

**Proposition 1.3** *Soit  $T$  un automorphisme de l'espace de Lebesgue  $(X, \mathcal{A}, \mu)$ , et soit  $\sigma_{\max}$  une mesure positive finie dans la classe d'équivalence du type spectral maximal de  $T$ . Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*

- (1)  $T$  est fortement mélangeant.
- (2) Pour tout  $f \in L_0^2(\mu)$ ,  $\widehat{\sigma}_f(p) \xrightarrow{|p| \rightarrow +\infty} 0$ .
- (3)  $\widehat{\sigma}_{\max}(p) \xrightarrow{|p| \rightarrow +\infty} 0$ .

**Preuve** — L'équivalence entre (1) et (2) est une reformulation de l'équivalence (1) $\iff$ (3) de la proposition 1.2. L'implication (2) $\implies$ (3) est une conséquence immédiate de l'existence de  $f \in L_0^2$  telle que  $\sigma_f = \sigma_{\max}$ . Pour (3) $\implies$ (2), on utilise le lemme qui suit.

**Lemme 1.4 (Riemann-Lebesgue généralisé)** *Soit  $\sigma$  une mesure positive finie sur  $]-\pi, \pi]$  telle que  $\widehat{\sigma}(p) \xrightarrow{|p| \rightarrow +\infty} 0$ . Alors, pour toute mesure  $\nu \ll \sigma$ , on a aussi  $\widehat{\nu}(p) \xrightarrow{|p| \rightarrow +\infty} 0$ .*

**Preuve** — On considère d'abord le cas où  $\varphi \stackrel{\text{déf}}{=} d\nu/d\sigma$  est un polynôme trigonométrique, cas dans lequel la conclusion est immédiate. Puis, dans le cas général, on utilise la densité des polynômes trigonométriques dans  $L^1(\sigma)$ .  $\square$

*Cas particulier* : on dit que  $T$  a *spectre de Lebesgue* si le type spectral maximal de  $T$  est (la classe d'équivalence de) la mesure de Lebesgue. La proposition 1.3 prouve que le spectre de Lebesgue entraîne le mélange.

## 2 Le mélange faible

Rappelons qu'une transformation  $T$  sur  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  est ergodique si et seulement si, pour tous  $A$  et  $B$  dans  $\mathcal{A}$ ,

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mu(A \cap T^{-j}B) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu(A)\mu(B). \quad (2)$$

Cette convergence est en fait la convergence au sens de Cesàro de  $\mu(A \cap T^{-j}B)$  vers  $\mu(A)\mu(B)$ .

Entre la convergence (2) qui caractérise l'ergodicité, et la convergence (1) qui caractérise le mélange, on peut introduire une troisième propriété, qui peut paraître artificielle au premier abord.

**Définition 2.1** *L'endomorphisme  $T$  de l'espace de Lebesgue  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  est dit faiblement mélangeant si, pour tous  $A$  et  $B$  dans  $\mathcal{A}$ , on a*

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} |\mu(A \cap T^{-j}B) - \mu(A)\mu(B)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (3)$$

En termes techniques, on peut dire que le mélange se caractérise par la convergence de la suite  $\mu(A \cap T^{-n}B)$  vers le produit  $\mu(A)\mu(B)$ , l'ergodicité par la convergence au sens de Cesàro de la même suite, et le mélange faible par la convergence au sens de Cesàro fort.

On démontre par les mêmes arguments l'analogie du théorème 1.2, qui caractérise cette fois le mélange faible par l'action de  $U_T$ .

**Théorème 2.2** *Soit  $T$  un endomorphisme de l'espace de Lebesgue  $(X, \mathcal{A}, \mu)$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

- (1)  $T$  est faiblement mélangeant.
- (2) Pour tous  $f$  et  $g$  dans  $L^2(\mu)$ ,

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left| \langle U_T^j f, g \rangle - \langle f, 1 \rangle \langle 1, g \rangle \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

- (3) Pour tout  $f \in L^2(\mu)$ ,

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left| \langle U_T^j f, f \rangle - \langle f, 1 \rangle \langle 1, f \rangle \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

## 2.1 Mélange sur une sous-suite de densité 1

Rappelons qu'une partie  $N$  de  $\mathbb{N}$  est dite *de densité 1* si

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{1}_N(j) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

**Lemme 2.3** *Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite bornée de réels. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*

- (1)  $\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} |a_j| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .
- (2) Il existe une partie  $N$  de  $\mathbb{N}$ , de densité 1, avec

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \in N}} a_n = 0.$$

- (3)  $\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} |a_j|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

**Preuve** — laissée en exercice...

Comme application immédiate de ce lemme, on obtient le résultat suivant.

**Théorème 2.4** *Soit  $T$  un endomorphisme de l'espace de Lebesgue  $(X, \mathcal{A}, \mu)$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

- (1)  $T$  est faiblement mélangeant.
- (2) Pour tous  $A$  et  $B$  dans  $\mathcal{A}$ , on peut trouver une partie  $N(A, B)$  de  $\mathbb{N}$ , de densité 1, telle que

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \in N(A, B)}} \mu(A \cap T^{-n}B) = \mu(A)\mu(B).$$

(3) Pour tous  $A$  et  $B$  dans  $\mathcal{A}$ ,

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left( \mu(A \cap T^{-j}B) - \mu(A)\mu(B) \right)^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

En fait, puisque l'on travaille dans un espace de Lebesgue, on dispose facilement d'une famille dénombrable  $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$  dense dans  $\mathcal{A}$ . À l'aide de la famille dénombrable de parties de densité 1  $(N(B_i, B_j))_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ , on peut construire une nouvelle partie  $N$  de densité 1 dans  $\mathbb{N}$ , qui marche pour tous les couples  $(B_i, B_j)$ . On en déduit alors facilement que pour tous  $A$  et  $B$  dans  $\mathcal{A}$ ,

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \in N}} \mu(A \cap T^{-n}B) = \mu(A)\mu(B).$$

D'où la nouvelle caractérisation du mélange faible, comme une propriété de mélange sur une sous-suite d'entiers de densité 1.

**Théorème 2.5** *L'endomorphisme  $T$  de l'espace de Lebesgue  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  est faiblement mélangeant si et seulement si il existe une partie  $N$  de  $\mathbb{N}$ , de densité 1, avec pour tous  $A$  et  $B$  dans  $\mathcal{A}$ ,*

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \in N}} \mu(A \cap T^{-n}B) = \mu(A)\mu(B).$$

## 2.2 Mélange faible et valeurs propres

On va maintenant voir une première application des mesures spectrales à la théorie ergodique : la caractérisation du mélange faible de  $T$  par l'absence de valeurs propres (autres que 1) pour  $U_T$ . Voyons tout d'abord quelques propriétés élémentaires des valeurs propres d'un automorphisme d'un espace de Lebesgue.

**Lemme 2.6** *Si  $\alpha$  est une valeur propre de  $U_T$ , alors  $|\alpha| = 1$ . Si de plus  $\alpha \neq 1$ , toute fonction propre associée à la valeur propre  $\alpha$  est d'intégrale nulle. Enfin, si  $T$  est ergodique toute fonction propre est de module constant.*

**Preuve** — Soit  $f$  une fonction propre associée à la valeur propre  $\alpha$  :  $f \circ T = \alpha f$ . Par conservation de la mesure, on a

$$\int_X |f| d\mu = \int_X |f \circ T| d\mu = |\alpha| \int_X |f| d\mu,$$

et comme  $f \neq 0$ ,  $|\alpha| = 1$ . On peut aussi écrire

$$\int_X f d\mu = \int_X f \circ T d\mu = \alpha \int_X f d\mu,$$

d'où nécessairement, si  $\alpha \neq 1$ ,

$$\int_X f d\mu = 0.$$

Enfin, puisque  $|f \circ T| = |\alpha||f| = |f|$ , l'ergodicité de  $T$  implique  $|f| = \text{constante}$ .  $\square$

**Définition 2.7** On dit que  $T$  est à spectre continu si 1 est la seule valeur propre de  $U_T$ , et si l'espace propre associé est réduit aux fonctions constantes (autrement dit si  $T$  est ergodique, et si 1 est la seule valeur propre).

**Proposition 2.8**  $T$  est à spectre continu si et seulement si pour tout  $f \in L^2(\mu)$  de moyenne nulle, la mesure spectrale  $\sigma_f$  est continue, c'est-à-dire donne une masse nulle à chaque singleton de  $] - \pi, \pi]$ .

**Preuve** — laissée en exercice. . .

**Théorème 2.9**  $T$  est faiblement mélangeant si et seulement si  $T$  est à spectre continu.

**Preuve** — Supposons d'abord  $T$  faiblement mélangeant, et soit  $f \in L^2(\mu)$  avec  $U_T f = \alpha f$ . Si  $\alpha = 1$ , comme  $T$  est ergodique,  $f$  est une constante. Si  $\alpha \neq 1$ , on a  $\int f d\mu = 0$ , et donc grâce à la propriété de mélange faible,

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} |\langle U_T^j f, f \rangle| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0,$$

d'où

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} |\langle \alpha^j f, f \rangle| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

Mais comme  $|\alpha| = 1$ , on en déduit  $\langle f, f \rangle = 0$  : il n'y a donc pas d'autre valeur propre que 1.

Réciproquement, supposons  $T$  à spectre continu. Pour montrer le mélange faible, il suffit de montrer que pour tout  $f \in L^2(\mu)$ ,

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left| \langle U_T^j f, f \rangle - \langle f, 1 \rangle \langle 1, f \rangle \right|^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0. \quad (4)$$

Si  $f$  est constante, (4) est toujours vérifié. Il suffit donc de considérer le cas où  $f$  est orthogonale à 1, c'est-à-dire d'intégrale nulle. On doit alors montrer

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left| \langle U_T^j f, f \rangle \right|^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

Mais comme  $T$  est à spectre continu, on sait que  $\sigma_f$  est continue ; il suffit donc de vérifier que si  $\sigma$  est une mesure continue sur  $] - \pi, \pi]$ , alors

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left| \int_{]-\pi, \pi]} e^{ij t} d\sigma(t) \right|^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

En utilisant le théorème de Fubini, on obtient

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left| \int_{]-\pi, \pi]} e^{ijt} d\sigma(t) \right|^2 \\
&= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left( \int_{]-\pi, \pi]} e^{ijt} d\sigma(t) \cdot \int_{]-\pi, \pi]} e^{-ijt} d\sigma(t) \right) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \int_{]-\pi, \pi] \times ]-\pi, \pi]} e^{ij(t_1-t_2)} d(\sigma \otimes \sigma)(t_1, t_2) \\
&= \int_{]-\pi, \pi] \times ]-\pi, \pi]} \left( \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left( e^{i(t_1-t_2)} \right)^j \right) d(\sigma \otimes \sigma)(t_1, t_2).
\end{aligned}$$

Or, si  $t_1 \neq t_2$ , on a

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left( e^{i(t_1-t_2)} \right)^j = \frac{1}{n} \frac{1 - e^{in(t_1-t_2)}}{1 - e^{i(t_1-t_2)}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Puisque la mesure  $\sigma$  est supposée continue,  $\sigma \otimes \sigma$  donne une masse nulle à

$$\{(t_1, t_2) \in ]-\pi, \pi] \times ]-\pi, \pi] / t_1 = t_2\}.$$

On a donc  $\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left( e^{i(t_1-t_2)} \right)^j \rightarrow 0$ ,  $(\sigma \otimes \sigma)$ -presque sûrement sur  $]-\pi, \pi] \times ]-\pi, \pi]$ . Comme c'est, en module, majoré par 1, le théorème de convergence dominée de Lebesgue permet de conclure. □

### 2.3 Mélange faible et ergodicité de $T \times T$

Si  $T$  est un endomorphisme de l'espace de Lebesgue  $(X, \mathcal{A}, \mu)$ , on définit sur l'espace de Lebesgue produit  $(X \times X, \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}, \mu \otimes \mu)$  l'endomorphisme  $T \times T : (x_1, x_2) \mapsto (Tx_1, Tx_2)$ . Ce n'est pas parce que  $T$  est ergodique que  $T \times T$  doit l'être, comme le montre le contre-exemple suivant.

**Proposition 2.10** *Soit  $T$  une rotation irrationnelle sur le cercle unité de  $\mathbb{C}$ . Alors  $T$  est ergodique, mais  $T \times T$  ne l'est pas.*

**Preuve** — On représente de façon usuelle la rotation irrationnelle d'angle  $2\pi\alpha$  par l'addition de  $\alpha \pmod{1}$  sur le tore  $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  identifié à  $[0, 1[$ . Pour montrer que  $T \times T$  n'est pas ergodique, il suffit de trouver une application  $f : \mathbb{T} \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  non presque sûrement constante, et qui soit  $T \times T$ -invariante. Pour cela, il suffit de considérer  $f$  définie par  $f(x_1, x_2) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} x_1 - x_2$ . Alors  $f$  n'est pas constante, mais  $f \circ T \times T(x_1, x_2) = (x_1 + \alpha) - (x_2 + \alpha) = f(x_1, x_2)$ . □

Une des applications remarquables du mélange faible est justement de caract\u00e9riser l'ergodicit\u00e9 de  $T \times T$ .

**Théorème 2.11** Soit  $T$  un endomorphisme de l'espace de Lebesgue  $(X, \mathcal{A}, \mu)$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes.

- (1)  $T$  est faiblement mélangeant.
- (2)  $T \times T$  est ergodique.
- (3)  $T \times T$  est faiblement mélangeant.

**Preuve** — On montre d'abord (1)  $\implies$  (3). Puisque  $T$  est faiblement mélangeant, en utilisant le théorème 2.4 on trouve une partie  $N$  de densité 1 dans  $\mathbb{N}$ , telle que pour  $A, B, C$  et  $D$  dans  $\mathcal{A}$

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \in N}} \mu(A \cap T^{-n}B) = \mu(A)\mu(B)$$

et

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \in N}} \mu(C \cap T^{-n}D) = \mu(C)\mu(D).$$

On en déduit immédiatement

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \in N}} \mu \otimes \mu(A \times C \cap T \times T^{-n}(B \times D)) = \mu \otimes \mu(A \times C)\mu \otimes \mu(B \times D),$$

d'où, grâce au lemme 2.3

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} |\mu \otimes \mu(A \times C \cap T \times T^{-j}(B \times D)) - \mu \otimes \mu(A \times C)\mu \otimes \mu(B \times D)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (5)$$

Puisque les pavés de type  $A \times C$ , avec  $A$  et  $C$  dans  $\mathcal{A}$  forment une semi-algèbre qui engendre  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ , on en déduit que la convergence (5) a toujours lieu si on remplace les pavés  $A \times C$  et  $B \times D$  par n'importe quels ensembles mesurables dans  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ .

(3)  $\implies$  (2) est évident. Il reste à montrer (2)  $\implies$  (1). On laisse en exercice le soin de vérifier que  $T \times T$  étant ergodique,  $T$  l'est aussi. On a donc, pour  $A$  et  $B$  dans  $\mathcal{A}$

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mu(A \cap T^{-j}B) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu(A)\mu(B).$$

Par ailleurs, en appliquant l'ergodicité de  $T \times T$  aux pavés  $A \times A$  et  $B \times B$ , on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (\mu(A \cap T^{-j}B))^2 &= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mu \otimes \mu(A \times A \cap T \times T^{-j}(B \times B)) \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu \otimes \mu(A \times A)\mu \otimes \mu(B \times B) \\ &= \mu(A)^2\mu(B)^2. \end{aligned}$$

On en déduit aisément

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (\mu(A \cap T^{-j}B) - \mu(A)\mu(B))^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

et donc  $T$  est faiblement mélangeant par le théorème 2.4.  $\square$

### Complément : ergodicité du produit de deux systèmes dynamiques

Le théorème 2.11 peut se généraliser au produit de deux systèmes dynamiques ergodiques  $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$  et  $(Y, \mathcal{B}, \nu, S)$  : la condition d'ergodicité d'un tel produit étant que  $T$  et  $S$  n'aient pas de valeur propre commune (en dehors évidemment de la valeur propre 1 attachée aux fonctions constantes). Pour le démontrer, on utilise un résultat sur les valeurs propres contenu dans le lemme qui suit.

**Lemme 2.12** *L'ensemble des valeurs propres d'un automorphisme ergodique d'un espace de Lebesgue forme un sous-groupe multiplicatif du cercle unité.*

**Preuve** — Si  $\alpha$  est une valeur propre de  $U_T$  attachée à la fonction propre  $f$ ,  $\alpha^{-1} = \bar{\alpha}$  est aussi une valeur propre de  $U_T$ , attachée à la fonction propre  $\bar{f}$ . Si de plus  $\beta$  est une autre valeur propre, attachée à la fonction propre  $g$ , alors  $(fg) \circ T = \alpha\beta(fg)$  ; comme  $f$  et  $g$  sont de module constant (voir le lemme 2.6),  $fg \in L^2$  et c'est donc une fonction propre associée à la valeur propre  $\alpha\beta$ . □

**Théorème 2.13** *Soient  $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$  et  $(Y, \mathcal{B}, \nu, S)$  deux systèmes dynamiques ergodiques. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

- (1) *La seule valeur propre commune à  $S$  et  $T$  est 1.*
- (2) *Le système dynamique produit  $(X \times T, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu, T \times S)$  est ergodique.*

**Preuve** — On montre d'abord que (2) $\implies$ (1) en remarquant que si  $\alpha$  est une valeur propre commune à  $U_T$  et  $U_S$ , attachée respectivement aux fonctions propres  $f \in L^2(\mu)$  et  $g \in L^2(\nu)$ , alors  $f\bar{g} \circ T \times S = f\bar{g}$ . Si  $T \times S$  est ergodique, cela implique  $f\bar{g} = \text{constante}$ , ce qui n'est possible que si  $f$  et  $g$  sont déjà constantes, c'est-à-dire si  $\alpha = 1$ .

Pour montrer que (1) $\implies$ (2), on commence par vérifier que pour  $f \in L^2_0(\mu)$  et  $g \in L^2_0(\nu)$ ,

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \otimes g \circ (T \times S)^k \right\|_{L^2(\mu \otimes \nu)}^2 = \int_{]-\pi, \pi] \times ]-\pi, \pi]} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{ik(t+s)} \right|^2 d\sigma_f \otimes \sigma_g.$$

Or, puisque  $S$  et  $T$  n'ont pas de valeur propre commune autre que 1, il n'existe pas de  $t \in ]-\pi, \pi]$  tel que l'on ait à la fois  $\sigma_f(\{t\}) > 0$  et  $\sigma_g(\{-t\}) > 0$  (ici on utilise le fait que si  $\alpha$  est valeur propre, alors  $\bar{\alpha}$  est aussi valeur propre : voir le lemme 2.12). Par un argument similaire à celui utilisé dans la preuve du théorème 2.9, on en déduit que

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \otimes g \circ (T \times S)^k \right\|_{L^2(\mu \otimes \nu)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Le soin est laissé au lecteur d'en déduire l'ergodicité de  $T \times S$ . □