Introduction et premiers exemples

19 mai 2003

Considérons un espace mesuré $(X, \mathscr{A}, \mu)$: X est un ensemble, $\mathscr{A}$ est une σ-algèbre de parties de X et μ est une mesure positive sur $\mathscr{A}$. On dit qu'une transformation $T : X \longrightarrow X$ *préserve la mesure* μ si elle est $\mathscr{A}$-mesurable (*i.e.* pour tout $A \in \mathscr{A}$, $T^{-1}A \in \mathscr{A}$), et si pour toute partie mesurable A, on a $T(\mu)(A) \stackrel{\text{déf}}{=} \mu(T^{-1}A) = \mu(A)$. On dit également dans ce cas que la mesure μ est T-invariante.

Étant donnée une transformation T sur un espace X muni d'une structure topologique, et en supposant au moins T mesurable par rapport à la tribu des boréliens de X, l'étude de l'ensemble des éventuelles mesures T-invariantes constitue l'un des problèmes les plus intéressants abordés par la théorie ergodique. Il se peut dans certains cas qu'il n'existe aucune mesure finie non nulle T-invariante, comme dans l'exemple suivant : X est l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers et $Tx \stackrel{\text{déf}}{=} x + 1$. Ici, toute mesure T-invariante doit donner la même masse à chaque entier ; si cette masse est nulle, la mesure est nulle car $\mathbb{Z}$ est dénombrable, et sinon on a évidemment $\mu(\mathbb{Z}) = +\infty$. Néanmoins, dans de nombreux cas on est assuré de l'existence d'une probabilité μ qui soit T-invariante. On dispose par exemple du théorème suivant.

Théorème 0.1 (Krylov, Bogolioubov) *Si X est un espace métrique compact, et si $T : X \longrightarrow X$ est une transformation continue, alors il existe au moins une mesure de probabilité T-invariante sur X.*

Idée d'une preuve – L'ensemble $\mathscr{M}_1(X)$ des mesures de probabilité sur X muni de la topologie de la convergence faible est compact métrisable. Étant donné un point x, on considère la suite $\left(m_n\right)_{n\geq 1}$ définie dans $\mathscr{M}_1(X)$ par

$$m_n \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \delta_{T^k x}$$

où δ_y désigne la mesure de Dirac en y. On a pour toute fonction continue sur X

$$\left|\int_X f dm_n - \int_X f \circ T dm_n\right| \leq \frac{2 \max f}{n}, \tag{1}$$

ainsi si n est grand, m_n est "presque" T-invariante. Soit $\mu = lim_{k\longrightarrow\infty} m_{n_k}$ une valeur d'adhérence de la suite. Par (1), on a aussi $T(m_{n_k}) \longrightarrow \mu$, or la continuité de T entraîne aussi $T(m_{n_k}) \longrightarrow T(\mu)$. Ainsi μ est T-invariante. ❏

Dans la suite, on ne s'intéressera généralement pas à ce problème de l'existence des mesures T-invariante : la mesure μ sera donnée au départ, et sauf indication contraire ce sera une mesure de probabilité. On supposera même que l'espace probabilisé $(X, \mathscr{A}, \mu)$ satisfait à de bonnes hypothèses, explicitées au paragraphe suivant.

1 Espaces de Lebesgue

Les espaces de Lebesgue constituent une classe d'espaces probabilisés, suffisamment large pour englober la quasi-totalité des exemples rencontrés couramment, mais vérifiant de bonnes propriétés qui simplifient notablement certains aspects techniques en théorie ergodique. Ils ont été définis et étudiés en détail par V.A. Rokhlin dans un article fondamental ([2]). D'autres définitions équivalentes à celle de Rokhlin furent données plus tard ([1, 4, 3]), mais toutes ces définitions sont abstraites et difficilement utilisables. On se contentera donc ici de les définir par une de leurs propriétés qui, en fait, les caractérise à un détail négligeable près.

Définition 1.1 *Soient* $(X, \mathscr{A}, \mu)$ *et* $(X', \mathscr{A}', \mu')$ *deux espaces probabilisés. On dit qu'ils sont* isomorphes modulo zéro *si il existe* $X_0 \in \mathscr{A}$, $X_0' \in \mathscr{A}'$, *chacun de mesure* 1, *et une bijection bimesurable* φ *entre* X_0 *et* X_0' *avec* $\varphi(\mu) = \mu'$.

Définition 1.2 *Soit* $(X, \mathscr{A}, \mu)$ *un espace probabilisé. On dit que c'est un* espace de Lebesgue *si*

1. *la* σ*-algèbre* $\mathscr{A}$ *contient tous les ensembles* μ*-négligeables,*
2. *il existe des réels* $m_0, m_1, \ldots$ *avec*
   - $m_0 \in [0, 1]$,
   - $m_1 \geq m_2 \geq \cdots \geq 0$,
   - $\sum_{n \geq 1} m_n = 1 - m_0$

   tels que $(X, \mathscr{A}, \mu)$ *soit isomorphe modulo zéro à l'espace probabilisé* $(X', \mathscr{A}', \mu')$ *constitué de l'intervalle* $[0, m_0]$ *muni de la mesure de Lebesgue, auquel on a rajouté des points* $(x_n)_{n \geq 1}$ *de masses respectives* $(m_n)_{n \geq 1}$.

Dans un cas extrême, on a $m_0 = 0$, ce qui signifie que $(X, \mathscr{A}, \mu)$ est, à un négligeable près, constitué d'une famille au plus dénombrable de points de masse strictement positive. Tout espace probabilisé fini ou dénombrable est donc un espace de Lebesgue. L'autre cas extrême, lorsque $m_0 = 1$, est celui généralement rencontré en théorie ergodique. Ainsi, l'espace d'états $(X, \mathscr{A}, \mu)$ est le plus souvent isomorphe modulo zéro à l'intervalle $[0, 1]$ muni de la mesure de Lebesgue (d'où bien sûr le terme "espace de Lebesgue").

1.1 Des exemples d'espaces de Lebesgue

Les résultats suivants, dont on peut trouver les démonstrations dans les références citées précédemment, montrent que les espaces de Lebesgue constituent vraiment la majeure partie des espaces probabilisés utilisés couramment.

Théorème 1.3 *Si* X *est un espace polonais (i.e. métrique, complet, séparable), et si* $\mathscr{A}$ *est la tribu des boréliens de* X *complétée pour la mesure de probabilité* μ, *alors* $(X, \mathscr{A}, \mu)$ *est un espace de Lebesgue.*

Théorème 1.4 *Si* $(X_i, \mathscr{A}_i, \mu_i)_{i \in I}$ *est une famille finie ou dénombrable d'espaces de Lebesgue, et si* $(X, \mathscr{A}, \mu)$ *est le produit de ces espaces, défini par*

- $X \stackrel{\text{déf}}{=} \prod_{i \in I} X_i$,
- $\mu \stackrel{\text{déf}}{=} \bigotimes_{i \in I} \mu_i$,
- $\mathscr{A}$ *est la* σ*-algèbre produit complétée pour* μ,

alors $(X, \mathscr{A}, \mu)$ *est un espace de Lebesgue.*

1.2 Automorphismes d'un espace de Lebesgue

On s'intéresse aux transformations T de X possédant les propriétés suivantes :
- T est inversible ;
- T et T^{-1} sont mesurables ;
- pour tout $A \in \mathscr{A}$, $\mu(A) = \mu(TA) = \mu(T^{-1}A)$.

On convient le plus souvent d'identifier deux telles transformations qui coïncident en-dehors d'un ensemble négligeable, et on appelle *automorphisme de l'espace de Lebesgue* $(X, \mathscr{A}, \mu)$ une classe d'équivalence de transformations vérifiant les propriétés ci-dessus et qui coïncident presque partout.

On note $\mathrm{Aut}(X, \mathscr{A}, \mu)$ le groupe des automorphismes de $(X, \mathscr{A}, \mu)$. On appellera dans la suite *système dynamique* un quadruplet de la forme $(X, \mathscr{A}, \mu, T)$ où $T \in \mathrm{Aut}(X, \mathscr{A}, \mu)$.

2 Premiers exemples

2.1 Rotations du cercle

Soit α un nombre réel. Sur le cercle unité du plan complexe, on considère la rotation R_α d'angle $2\pi\alpha$: $z \longmapsto e^{i2\pi\alpha}z$. Cette transformation préserve clairement la mesure de Lebesgue normalisée sur le cercle (notée λ), mais on peut deviner que les propriétés du système dynamique ainsi obtenu vont dépendre de la valeur de α. En particulier, le fait que α soit rationnel ou non joue un rôle fondamental : si $\alpha \in \mathbb{Q}$, la rotation R_α est périodique et l'orbite de tout point z du cercle est formée des sommets d'un polygone régulier. Au contraire, si $\alpha \notin \mathbb{Q}$, on peut imaginer que les points de l'orbite de z se répartissent uniformément sur le cercle. Le théorème qui suit précise cette idée.

Théorème 2.1 (Équirépartition des points de l'orbite d'une rotation irrationnelle) *Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Pour tout point z du cercle, l'ensemble des points $R_\alpha^k(z)$, $k \in \mathbb{N}$ est dense dans le cercle. De plus, pour tout arc de cercle A, on a*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_A(R_\alpha^k z) \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda(A). \tag{2}$$

Plan d'une preuve

1. Vérifier que, α étant irrationnel, les points $R_\alpha^k(z)$, $k \in \mathbb{N}$ sont deux à deux distincts.
2. En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $m \geq 1$ tel que $R_\alpha^m = R_\beta$ avec $|\beta| < \varepsilon$. (Utiliser le principe des tiroirs, en partitionnant le cercle en arcs de longueurs inférieures à ε.)
3. Montrer que si $0 < |\beta| < \varepsilon$, pour tout arc de cercle A et tout point z du cercle,
$$\lambda(A) - \varepsilon \; < \; \liminf_{n\longrightarrow\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_A(R_\beta^k z) \leq \limsup_{n\longrightarrow\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_A(R_\beta^k z) \; < \; \lambda(A) + \varepsilon. \tag{3}$$
Pour cela, vérifier que le nombre de points consécutifs de l'orbite de z qui tombent dans A est toujours compris entre $\lambda(A)/|\beta| - 1$ et $\lambda(A)/|\beta| + 1$.
4. Montrer que l'orbite d'un point z sous l'action de R_α est la réunion des orbites de m points du cercle sous l'action de R_β, en regroupant les points $R_\alpha^k(z)$ suivant le reste de la division euclidienne de k par m. En déduire que (3) reste vrai si on remplace β par α, et conclure. ❑

La convergence (2) reste évidemment vraie si A est une union finie d'arcs de cercle. Mais que se passe-t-il pour un borélien quelconque ? On ne peut certainement pas espérer la validité de (2) pour *tout* point z sans imposer de condition sur A. En effet, prenons pour A un arc de cercle d'intérieur non vide privé de tous les points de l'orbite d'un z_0 fixé. Alors la mesure de A est la même que celle de l'arc de cercle, donc strictement positive, car on n'a retiré qu'un nombre dénombrable de points. Mais par définition de A, $R_\alpha^k z_0$ ne tombe jamais dans A et donc on a toujours

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_A(R_\alpha^k z_0) \;=\; 0.$$

En fait, la convergence (2) continue à être valide pour un borélien quelconque, mais seulement pour λ-presque tout z dans le cercle, le négligeable en-dehors duquel la convergence a lieu dépendant de l'ensemble A considéré. Ce résultat est un cas particulier du théorème ergodique ponctuel de Birkhoff, qui sera abordé un peu plus tard.

Que se passe-t-il dans le cas où α est rationnel ? Clairement, (2) n'est plus vrai même à un ensemble négligeable près, puisqu'alors il existe des arcs de cercle A de mesure $\lambda(A) > 0$ et un ensemble de points z de mesure strictement positive dont l'orbite ne rencontre jamais A. Cela est dû à l'existence de partitions du cercle en deux parties de mesure strictement positive *invariantes* par R_α, c'est-à-dire telles que $A = R_\alpha^{-1}(A)$.

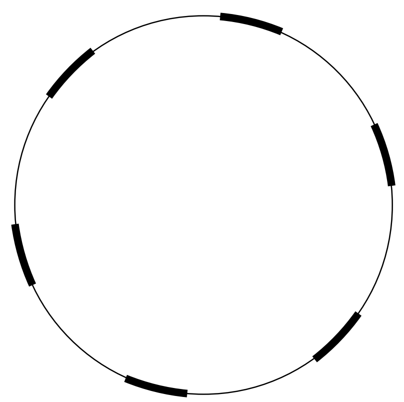

FIG. 1 – Un ensemble invariant pour $R_{1/6}$

Ceci mène à la définition de la première propriété importante d'un système dynamique.

Définition 2.2 *Le système* $(X, \mathscr{A}, \mu, T)$ *est dit* ergodique *si il n'existe pas de partie A mesurable invariante de mesure* $0 < \mu(A) < 1$.

Théorème 2.3 *Si α est irrationnel, la rotation R_α est ergodique sur le cercle muni de la mesure de Lebesgue.*

Idée d'une preuve – (Voir [5], p. 22.) Il s'agit de montrer que si A est une partie mesurable R_α-invariante telle que $\lambda(A) > 0$, alors $\lambda(A) = 1$. Or, étant donné $\varepsilon > 0$, puisque $\lambda(A) > 0$ on peut toujours trouver un arc de cercle I de mesure $\lambda(I) < \varepsilon$ et tel que $\lambda(A \cap I) > (1-\varepsilon)\lambda(I)$. Puis, en utilisant le fait que A est R_α-invariant, on vérifie que A remplit toujours une proportion au moins $1 - \varepsilon$ de n'importe quel $R_\alpha^k I$ pour $k \in \mathbb{Z}$. Enfin, en utilisant la densité de l'orbite d'une des bornes de I sous l'action de R_α, il est facile de trouver des entiers $k_1 < k_2 < \cdots < k_l$ tels que les arcs de cercle $R_\alpha^{k_j} I$, $1 \leq j \leq l$ soient deux à deux disjoints et recouvrent une proportion au moins $1 - 2\varepsilon$ du cercle. On en déduit

$$\lambda(A) \ > \ (1-\varepsilon)(1-2\varepsilon),$$

et puisque ε est arbitraire, $\lambda(A) = 1$. ❑

2.2 La transformation du boulanger

L'espace d'états est ici constitué du carré $[0,1[\times[0,1[$, et la transformation évoque le pétrissage de la pâte par le boulanger. On la décrit en trois étapes :

1. on "étale" le carré pour en faire un rectangle de côtés 2 et 1/2
2. on coupe le rectangle en deux,
3. on replace le second morceau au-dessus du premier pour reconstituer un carré de côté 1.

Aucune de ces opérations ne change la surface d'une partie A quelconque du carré, et la mesure de Lebesgue est donc préservée par T.

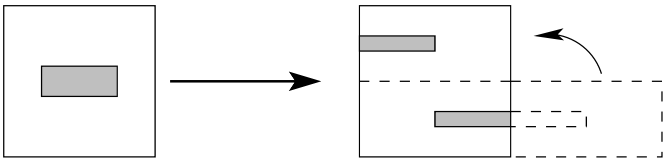

FIG. 2 – La transformation du boulanger agissant sur le carré

Plus formellement, la transformation du boulanger peut être décrite par la formule

$$\text{si } x = (x_1, x_2) \in [0,1[\times[0,1[, \quad T(x) \overset{\text{déf}}{=} \begin{cases} (2x_1, x_2/2) & \text{si } x_1 < 1/2, \\ (2x_1 - 1, x_2/2 + 1/2) & \text{si } x_1 \geq 1/2. \end{cases} \tag{4}$$

En itérant un grand nombre de fois la transformation du boulanger, on observe que les points d'une partie A donnée au départ semblent se répartir uniformément dans tout le carré : si A est de surface $1/4$, et si on se fixe une fenêtre B dans le carré, les points de $T^n A$ occupent environ $1/4$ de B si n est grand. Cette propriété porte le nom de *mélange*.

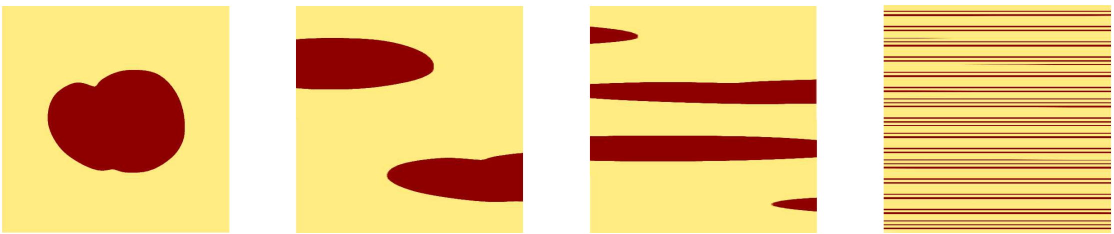

FIG. 3 – Une partie A du carré et ses images $T(A)$, $T^2(A)$, $T^6(A)$ par la transformation du boulanger

Définition 2.4 *Le système* $(X, \mathscr{A}, \mu, T)$ *est* mélangeant *si pour tous* A *et* B *dans* $\mathscr{A}$,

$$\mu(B \cap T^n A) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu(A)\mu(B). \tag{5}$$

Exercice 2.1 *Montrer que le mélange entraîne l'ergodicité.*

Le mélange pour la transformation du boulanger sera justifié dans la suite. Notons que les rotations du cercle ne sont certainement pas mélangeantes, car après un nombre quelconque d'itérations, un arc de cercle reste toujours un arc de cercle. En fait, les rotations du cercle vérifient une propriété très forte qui empêche le mélange.

Définition 2.5 *Le système $(X, \mathscr{A}, \mu, T)$ est* rigide *s'il existe une suite d'entiers (n_k) tendant vers $+\infty$ telle que pour tout mesurable A,*

$$\mu(A \Delta T^{n_k} A) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

Exercice 2.2 *Vérifier que la rigidité empêche le mélange.*

Exercice 2.3 *Montrer qu'une rotation du cercle est toujours rigide.*

2.3 Schémas de Bernoulli

Une façon classique pour obtenir un système dynamique consiste à le construire en partant d'un processus stationnaire $(X_p)_{p\in\mathbb{Z}}$, où chaque variable aléatoire X_p est à valeurs dans un espace E polonais (le plus souvent, E est un alphabet fini ou dénombrable, ou $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). À un tel processus est associé de manière canonique un système dynamique, construit sur l'espace $X \stackrel{\text{déf}}{=} E^{\mathbb{Z}}$ muni de la probabilité μ qui est la loi de $(X_p)_{p\in\mathbb{Z}}$: puisque ce processus est stationnaire, μ est invariante par la transformation T qui consiste à décaler les coordonnées vers la gauche. (Si $x = (x_p)_{p\in\mathbb{Z}} \in X$, $T(x)$ est le point $y = (y_p)_{p\in\mathbb{Z}}$ défini par $\forall p \in \mathbb{Z},\ y_p \stackrel{\text{déf}}{=} x_{p+1}$.) Cette transformation est couramment appelée *shift* ou *décalage*.

Un exemple simple, mais parmi les plus importants, de système dynamique construit à partir d'un processus stationnaire est celui obtenu lorsque les variables aléatoires X_p sont indépendantes et identiquement distribuées sur E (le plus souvent dans ce cas, E est un alphabet fini). Le système dynamique est alors appelé *schéma de Bernoulli*. Si $p_1, \dots, p_k$ sont des réels positifs tels que $\sum_{j=1}^k p_j = 1$, on note usuellement $B(p_1, \dots, p_k)$ le schéma de Bernoulli engendré par un processus i.i.d. $(X_p)_{p\in\mathbb{Z}}$ prenant ses valeurs dans $\{1, \dots, k\}$ et tel que $P(X_0 = j) = p_j$.

Théorème 2.6 *Un schéma de Bernoulli est toujours mélangeant.*

Idée d'une preuve – On vérifie d'abord la propriété (5) dans le cas où A et B sont mesurables par rapport à un nombre fini de coordonnées du processus : si n est assez grand, $T^n A$ est alors indépendant de B. Puis, on utilise le fait que tout A dans $\mathscr{A}$ peut être approché arbitrairement bien par un ensemble $\tilde{A}$ mesurable par rapport à un nombre fini de coordonnées, au sens où $\mu(A\Delta\tilde{A}) < \varepsilon$ pour un certain $\varepsilon > 0$ fixé à l'avance. En approchant de même B par $\tilde{B}$, on vérifie facilement que si n est assez grand pour que $\tilde{B}$ et $T^n\tilde{A}$ soient indépendants, on a

$$\Big|\mu(B \cap T^n A) - \mu(A)\mu(B)\Big| < 6\varepsilon.$$

❑

3 Le problème de l'isomorphisme en théorie ergodique

Un des problèmes majeurs auxquels s'intéresse la théorie ergodique consiste à se demander quand deux systèmes dynamiques $(X, \mathscr{A}, \mu, T)$ et $(Y, \mathscr{B}, \nu, S)$ sont essentiellement les mêmes. Dans la quasi-totalité des cas, les espaces de Lebesgue considérés sont sans atome, et donc $(X, \mathscr{A}, \mu)$ et $(Y, \mathscr{B}, \nu)$ sont isomorphes modulo zéro. Mais ceci ne garantit pas l'existence d'un isomorphisme qui transporte T en S.

Définition 3.1 *On dit que les deux systèmes dynamiques $(X, \mathscr{A}, \mu, T)$ et $(Y, \mathscr{B}, \nu, S)$ sont* isomorphes *si il existe un isomorphisme modulo zéro φ entre $(X, \mathscr{A}, \mu)$ et $(Y, \mathscr{B}, \nu)$ qui transforme T en S, c'est-à-dire tel que $S = \varphi \circ T \circ \varphi^{-1}$.*

Une fois établi l'isomorphisme entre deux systèmes, il peut être plus simple de montrer des propriétés sur l'un, qui seront alors automatiquement vérifiées par l'autre.

3.1 Application : la transformation du boulanger est un schéma de Bernoulli

Prenons l'exemple de la transformation du boulanger, définie sur $X \stackrel{\text{déf}}{=} [0,1[\times[0,1[$. À un point $x = (x_1, x_2)$ de X, faisons correspondre la suite doublement infinie

$$\varphi(x) \stackrel{\text{déf}}{=} (\ldots, y_{-3}, y_{-2}, y_{-1}, y_0, y_1, y_2 \ldots) \in Y \stackrel{\text{déf}}{=} \{0,1\}^{\mathbb{Z}},$$

où $0, y_0 y_1 y_2 \cdots$ et $0, y_{-1} y_{-2} y_{-3} \cdots$ sont les développements en base 2 de x_1 et x_2 respectivement. Il est immédiat que, X étant muni de la mesure de Lebesgue notée μ, les coordonnées y_j sont toutes indépendantes et équidistribuées, elles valent 0 ou 1 avec probabilité 1/2. Notons $\nu \stackrel{\text{déf}}{=} \varphi(\mu)$ et $\mathscr{B}$ la tribu des boréliens sur Y : φ est un isomorphisme modulo zéro entre les deux espaces de Lebesgue $(X, \mathscr{A}, \mu)$ et $(Y, \mathscr{B}, \nu)$. De plus, il est facile de vérifier à partir de (4) que

$$\varphi \circ T(x) \;=\; S \circ \varphi(x),$$

où S est le décalage des coordonnées sur Y. On obtient donc le résultat suivant.

Théorème 3.2 *La transformation du boulanger et le schéma de Bernoulli $B(1/2, 1/2)$ sont isomorphes.*

Corollaire 3.3 *La transformation du boulanger est mélangeante.*

Exercice 3.1 *Soient $p_1, \ldots, p_k$ des réels positifs tels que $\sum_{j=1}^{k} p_j = 1$. Construire une généralisation de la transformation du boulanger qui serait isomorphe au schéma de Bernoulli $B(p_1, \ldots, p_k)$.*

3.2 Représentation symbolique d'un système dynamique

L'isomorphisme entre la transformation du boulanger et le schéma de Bernoulli décrit au paragraphe précédent est un cas particulier d'une procédure assez commune en théorie ergodique. Dans un système dynamique donné $(X, \mathscr{A}, \mu, T)$, on a trouvé une partition finie $\mathscr{P}$ de X indexée par un ensemble fini (ou dénombrable) E (souvent appelé "alphabet"), grâce à laquelle on peut entièrement *coder* le système. Remarquons qu'une telle partition peut s'identifier à une application mesurable de X dans E, qui à chaque x fait correspondre l'index de l'atome de $\mathscr{P}$ qui contient x. Dans l'exemple du boulanger, la partition finie qui nous intéresse est celle obtenue en coupant le carré en deux dans le sens vertical, qui correspond à l'application $x = (x_1, x_2) \longmapsto y_0 \in \{0,1\}$, où y_0 est le premier chiffre de l'écriture en base 2 de x_1.

Appelons $\mathscr{P}$-nom d'un point $x \in X$ la suite doublement infinie

$$\mathscr{P}|_{-\infty}^{+\infty}(x) \stackrel{\text{déf}}{=} (\ldots, \mathscr{P}(T^{-2x}), \mathscr{P}(T^{-1}x), \mathscr{P}(x), \mathscr{P}(Tx), \mathscr{P}(T^2x), \ldots) \in E^{\mathbb{Z}}.$$

Toujours dans le cas particulier du boulanger, on remarque que le $\mathscr{P}$-nom de x n'est autre que $\varphi(x)$ construit précédemment. Ce $\mathscr{P}$-nom a ici la remarquable propriété d'être injectif : deux points différents de X ont un $\mathscr{P}$-nom qui diffère au moins en une coordonnée. On dit que $\mathscr{P}$ est une partition *génératrice* du système, car cette propriété est (à peu près) équivalente au fait que les images $T^{-k}\mathscr{P} = \mathscr{P} \circ T^k$ de la partition $\mathscr{P}$ sous l'action de T engendrent la tribu $\mathscr{A}$. En effet, dans un espace de Lebesgue on dispose de la propriété très utile suivante.

Théorème 3.4 *Dans l'espace de Lebesgue $(X, \mathscr{A}, \mu)$, soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille dénombrable de parties mesurables. La tribu $\sigma(A_n,\ n \in \mathbb{N})$ engendrée par cette famille est $\mathscr{A}$ si et seulement si la famille (A_n) sépare les points sur une partie X_0 de mesure 1.*

À chaque fois que l'on construit une telle partition génératrice dans un système dynamique $(X, \mathscr{A}, \mu, T)$, l'application φ de X dans $E^{\mathbb{Z}}$ qui à x fait correspondre son $\mathscr{P}$-nom est un isomorphisme entre $(X, \mathscr{A}, \mu, T)$ et le système "symbolique" $(Y, \mathscr{B}, \nu, S)$, où $Y \stackrel{\text{déf}}{=} E^{\mathbb{Z}}$, $\mathscr{B}$ est sa tribu des boréliens, $\nu \stackrel{\text{déf}}{=} \varphi(\mu)$ et S est le décalage vers la gauche des coordonnées sur Y.

L'obtention de partitions génératrices dans un système dynamique quelconque fera l'objet d'une étude dans la suite du cours...

Exercice 3.2 *Montrer que dans le cas d'une rotation irrationnelle, une partition du cercle en deux arcs d'intérieur non vide est toujours génératrice.*

Références

[1] J. Haezendonck, *Abstract Lebesgue-Rokhlin spaces*, Bull. Soc. Math. Belgique **25** (1973), 243–258.

[2] V.A. Rokhlin, *On the fundamental ideas of measure theory*, AMS Translations Serie 1 **10** (1963), 2–53, (Première publication en russe : 1949.).

[3] D.J. Rudolph, *Fundamentals of measurable dynamics – Ergodic theory on Lebesgue spaces*, Oxford University Press, 1990.

[4] T. de la Rue, *Espaces de lebesgue*, Séminaire de Probabilités XXVII, Lecture Notes in Mathematics 1557, Springer-Verlag, 1993, pp. 15–21.

[5] P.C. Shields, *The ergodic theory of discrete sample path*, American Mathematical Society, 1996.