Mémoire de DEA

ANALYSE ET MODÈLES STOCHASTIQUES

Université de Rouen

Année 2002-2003

# Théorème centrale limite d'une particule marquée dans un processus d'exclusion simple

**Lamia BELHADJI**

Directeur de mémoire : **Claudio LANDIM**

# Table des matières

# Chapitre 1

# Introduction

Nous considérons une particule marquée dans un modèle d'exclusion simple symétrique, asymétriques ou encore dans le cas où le déplacement moyen des particules est nul mais pas nécessairement symétrique. Le but est de montrer le théorème centrale limite pour la position d'une particule marquée dans ces défférents cas.

Dans le premier chapitre on fait quelques rappels sur les processus, les chaînes de Markov et leurs générateurs. On donne aussi une caractérisation des mesures invariantes, cette dernière va nous permettre de montrer l'invariance des mesures produit de Bernoulli pour le processus de l'exclusion simple.

Dans le second on donne une méthode générale pour prouver le théorème centrale limite pour une fonctionnelle additive

$$\frac{1}{\sqrt{t}}\int_0^t f(X_s)ds,$$

associée à un processus de Markov $X_t$, ergodique de générateur infinitésimal $L$. On montre que la preuve se réduit à vérifier que la solution $f_\lambda$ de l'équation résolvante

$$\lambda f_\lambda - Lf_\lambda = V$$

satisfait la condition

$$\sup_{0<\lambda\leq 1} \|Lf_\lambda\|_{-1} < \infty,$$

qui signifi que $Lf_\lambda$ est bornée dans $\mathcal{H}_{-1}$. Toujours dans le chapitre deux on montre que cette condition est satisfaite dans le cas réversible ou sous des conditions appelées condition du secteur ou du secteur gradué.

Dans le dernier chapitre on utilise les résultats du chapitre deux pour montrer le théorème centrale limite pour la position d'une particule marquée dans un processus d'exclusion simple symétrique ou encore dans le cas de la moyenne nulle

$$\sum_z zP(z) = 0.$$

Le même théorème sera montré pour un processus asymétrique pour une dimension $d \geq 3$.

# Chapitre 2

# Généralités sur les processus

## 2.1 Martingales

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ une famille croissante de sous tribus de $\mathcal{F}$. On dit que $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ est continue à droite si pour tout $t \in [0, +\infty[$ on a $\mathcal{F}_t = \bigcap_{u>t} \mathcal{F}_u$, on supposera de plus que $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ est complète, $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ est appelée filtration ou famille de référence.

Sur l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un processus stochastique à valeurs réelles est appelé martingale (surmartingale, sousmartingale resp.) si

1. $X_t$ est intégrable pour tout $t \geq 0$.
2. $X_t$ est $\mathcal{F}_t$-adapté.
3. Pour tout $0 \leq s \leq t$, $\mathbb{E}(X_t/\mathcal{F}_s) = X_s \quad p.s.$ (resp. $\mathbb{E}(X_t/\mathcal{F}_s) \leq X_s, \mathbb{E}(X_t/\mathcal{F}_s) \geq X_s \quad p.s.$ ).

Un résultat incontournable sur les martingales est le théorème de décomposition de Doob-Meyer. On note $\mathcal{M}^2$ l'ensemble des martingales réelles de carré intégrable, continues à droite ayant des limites à gauche (c.à.d.l.à.g). Soit $M_t \in \mathcal{M}^2$, il existe un unique processus $A = (A_t)_{t\geq 0}$ prévisible intégrable, nul en zéro et tel que $(M_t^2 - A_t)_{t\geq 0}$ soit une $\mathcal{F}_t$ martingale.

Le processus $A$ est le compensateur prévisible de $M$ et on le note $(< M >_t)_{t\geq 0} =< M >$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$< M >_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[(M_k - M_{k-1})^2/\mathcal{F}_{k-1}].$$

Le processus croissant $B$ tel que $M^2 - B$ soit une martingale nulle en zéro est la variation quadratique de $M$ et on le note $(< M, M >_t)_{t\geq 0} =< M, M >$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$< M, M >_n = \sum_{k=1}^{n} (M_k - M_{k-1})^2.$$

## 2.2 Processus de Markov, générateur et semi-groupe

Soit $E$ un espace métrique, complet et séparable muni de sa tribu borélienne. Soit $D([0,+\infty),E)$ ou $D[0,+\infty)$ l'ensemble des fonctions $\eta_.$ de $[0,+\infty)$ dans $E$ continues à droite et ayant des limites à gauche, $D([0,+\infty),E)$ est l'espace canonique pour un processus de Markov d'espace d'états $E$. Sur $D([0,+\infty),E)$ on définit les applications coordonnées par $\pi_s(\eta_.) = \eta_s$ pour $s \in \mathbb{R}_+$.

Soient $\mathcal{F}$ la plus petite $\sigma$-algèbre rendant mesurable les $\pi_s$ et $\mathcal{F}_t$ l a plus petite $\sigma$-algèbre rendant mesurable les $\pi_s$ pour $0 \leq s \leq t$, $\mathcal{F}_t = \sigma\{\pi_s, 0 \leq s \leq t\}$.

**Définition 1** *Une famille $\{\mathbb{P}^\eta, \eta \in E\}$ de mesure de probabilités sur $D([0,+\infty),E)$ est un processus de Markov sur E si elle vérifie*

*a) Pour tout $\eta \in E$ on a $\mathbb{P}^\eta(\xi_. \in D([0,+\infty),E) : \xi_0 = \eta) = 1$.*

*b) L'application $\eta \to \mathbb{P}^\eta(A)$ de $E$ dans $[0,1]$ est mesurable pour tout $A \in \mathcal{F}$.*

*c) $\mathbb{P}^\eta(\eta_{s+.} \in A/\mathcal{F}_s) = \mathbb{P}^{\eta_s}(A)$ p.s. pour tout $\eta \in E$ et $A \in \mathcal{F}$.*

On notera par $\mathbb{E}^\eta$ l'espérance par rapport a $\mathbb{P}^\eta$

$$\mathbb{E}^\eta Z = \int_{D[0,+\infty)} Z d\mathbb{P}^\eta.$$

Soit $C_b(E)$ l'ensemble des fonctions continues bornées sur $X$, $C_b(X)$ est un espace de Banach muni de la norme

$$||f||_\infty = \sup_{\eta \in E} |f(\eta)|.$$

Pour $f \in C_b(E)$, on note $S(t)f(\eta) = \mathbb{E}^\eta(f(\eta_t))$. Le caractère mesurable de l'application $f \to S(t)f$ découle du $b$) de la définition 1, d'autre part on a

$$||S(t)f||_\infty \leq ||f||_\infty, \tag{2.1}$$

d'où $S(t)$ est un opérateur borné sur $C_b(E)$. Par la linéarité de l'intégrale on a

$$S(t)(\alpha f + \beta g) = \alpha S(t)f + \beta S(t)g,$$

pour des scalaires $\alpha, \beta$ et des fonctions $f$ et $g$. Ceci entraîne que $S(t)$ est un opérateur linéaire borné. Finalement par la propriété de Markov on a

$$\begin{aligned} S(s+t)f(\eta) &= \mathbb{E}^\eta[f(X_{s+t})] \\ &= \mathbb{E}^\eta[\mathbb{E}^\eta\{f(X_{s+t})/\mathcal{F}_s\}] \\ &= \mathbb{E}^\eta[\mathbb{E}^{X_s}\{f(X_t)\}] \\ &= \mathbb{E}^\eta[S(t)f(X_s)] \\ &= S(s)S(t)f(\eta). \end{aligned}$$

Ainsi la famille $\{S(t), t \geq 0\}$ forme un semi-groupe, i.e. $S(0) = I$ et $S(t+s) = S(s)S(t)$. De l'inégalité 2.1 on déduit que $S(t)$ est une contraction, on dira que $S(t)$ est un semi-groupe de contraction.

**Définition 2** *Un processus de Markov $\{\mathbb{P}^\eta, \eta \in E\}$ est un processus de Feller si $S(t)f \in C_b(E)$ pour tout $t \geq 0$ et $f \in C_b(E)$.*

On dit que $\{S(t)\}$ est un semi-groupe fortement continu si $||S(t)f - f|| \to 0$ lorsque $t \to 0$ pour toute $f \in C_b(E)$. Le générateur infinitisimal d'un semi-groupe est défini par

$$Lf = \lim_{t \to 0} \frac{S(t)f - f}{t},$$

avec $\mathcal{D}(L)$ le domaine de $L$ i.e. l'ensemble des fonctions pour lesquelles cette limite existe.

**Lemme 1** *Supposons que $\{S(t)\}$ est un semi-groupe fortement continu de générateur $L$. Alors,*

*a) Pour tout $f \in C_b(E)$ et $t > 0$, $\int_0^t S(s)fds \in \mathcal{D}(L)$ et*

$$S(t)f - f = L \int_0^t S(s)fds.$$

*b) Pour tout $f \in \mathcal{D}(L)$ et $t \geq 0$, $S(t)f \in \mathcal{D}(L)$ et*

$$\frac{d}{dt}S(t)f = LS(t)f = S(t)Lf.$$

*c) Pour tout $f \in \mathcal{D}(L)$ et $t \geq 0$,*

$$S(t)f - f = \int_0^t LS(s)fds = \int_0^t S(s)Lfds.$$

À chaque processus Markovien, on peut associer une famille de martingale qui le caractérise. Supposons que $X_t$ est un processus Markovien de Feller et que $S(t)f(x) = \mathbb{E}^x[f(X_t)]$ est un semi-groupe fortement continu sur $C_b(E)$, soit $L$ son générateur. Si $f \in \mathcal{D}(L)$, alors

$$M_t = f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t Lf(X_s)ds,$$

est une $\mathcal{F}_t$ martingale, continue à droite de moyenne nulle. Remarquons d'abord que

$$\begin{aligned}\int_0^t \mathbb{E}^x(Lf(X_s))ds &= \int_0^t S(s)Lf(x)ds \\ &= \int_0^t (S(s)L)f(x)ds \\ &= \int_0^t \frac{d}{ds}S(s)f(x) \\ &= S(t)f(x) - S(0)f(x) \\ &= \mathbb{E}^x[f(X_t)] - \mathbb{E}^x[f(X_0)].\end{aligned}$$

En utilisant la propriété de Markov et la remarque précédente on en déduit que si $0 \leq s \leq t$ alors,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^x(M_t/\mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}^x(f(X_t)/\mathcal{F}_s) - f(X_0) - \int_0^s Lf(X_u)du - \int_0^{t-s} \mathbb{E}^x(Lf(X_{u+s})/\mathcal{F}_s)du \\ &= M_s + \mathbb{E}^{X_s}(f(X_{t-s})) - \mathbb{E}^{X_s}(f(X_0)) - \int_0^{t-s} \mathbb{E}^{X_s}(Lf(X_u)du \\ &= M_s.\end{aligned}$$

Si maintenant $f$ et $f^2$ sont dans $\mathcal{D}(L)$, alors

$$V_t = M_t^2 - \int_0^t ds\{Lf^2(X_s) - 2f(X_s)Lf(X_s)\},$$

est une $\mathcal{F}_t$ martingale, $V_t$ est donc la variation quadratique de $M_t$.

On termine cette section par donner la définition du coeur. Soit $L$ un générateur infininitésimal, un sous espace $\mathcal{C}$ de $D(L)$ est un coeur pour $L$ si $L$ est la fermeture de sa réstriction à $\mathcal{C}$, i.e. $L = \overline{L|_{\mathcal{C}}}$.

Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble de toutes les mesures de probabilités sur $E$, muni de la topologie de la convergence faible, $\mu \longrightarrow \infty$ dans $\mathcal{P}$ si et seulement si $\displaystyle\int f d\mu_n \longrightarrow \int f d\mu$, pour toutes fonctions $f \in C_b(E)$.

Si $\pi \in \mathcal{P}$ et $\{\mathbb{P}^\eta, \eta \in E\}$ est un processus de Markov, alors le processus markovien correspondant de distribution initiale $\pi$ est un processus stochastique dont la distribution est donnée par

$$\mathbb{P}^\pi = \int_E \mathbb{P}^\eta \pi(d\eta).$$

Il en résulte que

$$\mathbb{E}^\pi(f(\eta_t)) = \int_E S(t) f d\pi.$$

Soit $\pi \in \mathcal{P}$ et $\pi S(t) \in \mathcal{P}$. Alors

$$\int f d[\pi S(t)] = \int S(t) f d\pi,$$

pour tout $f \in C_b(E)$. La mesure de probabilité $\pi S(t)$ est interprétée comme la distribution du processus à l'instant $t$ quand la distribution initiale est $\pi$.

Une mesure $\pi \in \mathcal{P}$ est dite invariante si $\pi S(t) = \pi$ pour tout $t \geq 0$. La classe de toutes les mesures invariantes sera notée $\mathcal{P}$. La proposition suivante donne une caractérisation des mesures invariantes.

**Proposition 1** *Soit $L$ le générateur infinitésimal d'un processus markovien dont le semi-groupe est $\{S(t), t \geq 0\}$. Alors*

$$\mathcal{P} = \{\mu \in \mathcal{P}, \int L f d\mu = 0 \ \forall f \in \mathcal{C}\}.$$

## 2.3 Théorème centrale limite pour les Martingales

Nous allons commencer par énnoncer le théorème centrale limite pour une suite de variable aléatoire stationnaire ergodique dont la somme partielle est une martingale de carré intégrable.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, un processus stochastique $\eta_t$ sur $\Omega$ est dit stationnaire si la distribution jointe de $(\eta_{t_1+t}, \ldots, \eta_{t_n+t})$ est indépendante de $t$ pour tout choix de $n$ et de $(t_1, \ldots, t_n)$. Ce processus est dit ergodique si de plus il vérifie la propriété suivante, pour tout évènement $G$ invariant par le shift $\theta_t$ on a

$$\mathbb{P}(\eta_. \in G) = 0 \text{ ou } 1.$$

Le résultat principal sur les processus stationnaires ergodiques est le théorème ergodique de Birkhoff.

**Théorème 1** *Si $\eta_t$ est un processus ergodique stationnaire et $f$ une fonction mesurable bornée sur $\Omega$ alors*

$$\frac{1}{t} \int_0^t f(\eta_s)\, ds \to \mathbb{E}(f(\eta_0)) \quad p.s.$$

*lorsque $t \longrightarrow \infty$. Si $\eta_t$ est seulement stationnaire la limite existe presque sûrement mais peut ne pas être une constante.*

Le théorème suivant vas nous permettre d'énoncer le théorème centrale limite pour des martingales. Soit $\{Z_j, j \geq 1\}$ une suite de variables aléatoires adaptées stationnaire ergodique telle que

$$\mathbb{E}(Z_1^2) < \infty \text{ et } \ \forall j \geq 1, \quad \mathbb{E}(Z_{j+1}/\mathcal{F}_j) = 0. \tag{2.2}$$

On remarque que $M_j = \sum_{k=1}^{j} Z_j$ est une martingale de carré intégrable et de moyenne nulle.

**Théorème 2** *Soit $\{Z_j, j \geq 1\}$ une suite de variables aléatoires stationnaire telle que 2.2 soit vérifiée. Alors $1/N^2 \sum_{j=1}^{N} Z_j$ converge en loi vers une variable aléatoire gaussienne centrée de variance $\sigma^2 = \mathbb{E}(Z_1^2)$.*

On arrive maintenant au théorème centrale limite pour les martingales dont la preuve est une simple application du théorème précédent. On considère une martingale $\{M_t, t \geq 0\}$ de carré intégrable continue à droite par rapport à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$, on suppose de plus que $M_0 = 0$.

**Théorème 3** *Supposons que la martingale $M$ est à accroissement stationnaire, i.e. pour tout $t \geq 0, n \geq 1$ et $0 \leq s_0 < \ldots < s_n$ on a*

$$(M_{s_1} - M_{s_0}, \ldots, M_{s_n} - M_{s_{n-1}}) = (M_{t+s_1} - M_{t+s_0}, \ldots, M_{t+s_n} - M_{t+s_{n-1}})$$

*en distribution et*

$$\lim_{t\longrightarrow\infty} \mathbb{E}\left[\left|\frac{< M, M >_t}{t} - \sigma^2\right|\right] = 0.$$

*Alors $M_t/\sqrt{t}$ converge en loi vers une variable aléatoire gaussienne centrée de variance $\sigma^2$.*

**Remarque 1** *On commence par remarquer que $\mathbb{E}(M_1^2) = \sigma^2$,*

$$\mathbb{E}\left[< M, M >_n\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(M_i - M_{i-1})^2 = n\mathbb{E}(M_1^2).$$

*Le théorème 3 se montre par une simple application du théorème 2, il suffit de montrer que $M_n/\sqrt{n}$ converge en loi lorsque $n \uparrow \infty$ vers une gaussienne centrée de variance $\sigma^2$, en effet,*

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{M_t}{\sqrt{t}} - \frac{M_{[t]}}{\sqrt{[t]}}\right)^2\right] \leq 2\mathbb{E}\left[\left(\frac{M_t - M_{[t]}}{\sqrt{t}}\right)^2\right] + 2\left(\frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{\sqrt{[t]}}\right)^2 \mathbb{E}[M_{[t]}^2], \tag{2.3}$$

*où $[a]$ est la partie entière d'un réel $a$. On remarque que $M_{[t]} = \sum_{i=0}^{[t]-1}(M_{i+1} - M_i)$, et*

*$M_{[t]}^2 = \sum_{i=0}^{[t]-1}(M_{i+1} - M_i)^2 + 2 \sum_{1\leq i<j\leq[t]} (M_{j+1} - M_j)(M_{i+1} - M_i)$. Si $1 \leq i < j \leq [t]$ on a*

$$\mathbb{E}((M_{j+1} - M_j)(M_{i+1} - M_i)) = \mathbb{E}((M_{i+1} - M_i)\mathbb{E}((M_{j+1} - M_j/\mathcal{F}_j) = 0.$$

*Il en résulte que*

$$\mathbb{E}(M_{[t]}^2) = \mathbb{E}(M_1^2) + \sum_{i=1}^{[t]-1} \mathbb{E}(M_{i+1} - M_i)^2.$$

*Comme les incréments de la martingale sont stationnaires on aura* $\mathbb{E}(M_{[t]}^2) = [t]\mathbb{E}(M_1^2)$. *On a aussi* $\mathbb{E}(M_{[t]+1} - M_{[t]})^2 = \mathbb{E}(M_{[t]+1} - M_t)^2 + \mathbb{E}(M_t - M_{[t]})^2$, *ainsi*

$$\mathbb{E}(M_t - M_{[t]})^2 \leq \mathbb{E}(M_{[t]+1} - M_{[t]})^2,$$

*et 2.3 est bornée par* $\frac{4}{t}\mathbb{E}(M_1^2)$.

# Chapitre 3

# Théorème centrale limite

## 3.1 Introduction

Dans tout le chapitre, $X_t$ est un processus de Markov à valeurs dans un espace d'états $E$ métrique, complet et séparable, muni de sa tribu borélienne $\xi$. Supposons que pour $X_t$, il existe une mesure $\pi$ ergodique et stationnaire. On désigne par $L$ le générateur infinitésimal du processus $X_t$, par $D(L)$ le domaine de $L$.

Soit $L^*$ l'adjoint de $L$ dans $L^2(\pi)$. Comme $\pi$ est stationnaire $L^*$ est lui même un générateur markovien. Supposons qu'il existe un coeur $\mathcal{C} \subset D(L) \cap D(L^*)$ pour les deux générateurs $L$ et $L^*$. On note $\mathbb{P}_\pi$ la mesure sur $D([0, +\infty), E)$ et par $\mathbb{E}_\pi$ l'espérance par rapport à $\mathbb{P}_\pi$.

On se fixe une fonction $V : E \longrightarrow \mathbb{R}$ dans $L^2(\pi)$. L'objectif de ce chapitre est de trouver des conditions sur $V$ qui assurent le théorème centrale limite pour la fonctionnelle additive

$$Z_t = \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^t V(X_s) ds.$$

L'idée est de représenter cette fonctionnelle comme la somme d'une martingale et d'un terme qui s'annule et d'utiliser le théorème centrale limite 3 des martingales.

On commence par supposer l'existence d'une fonction $f$ dans $D(L)$ solution de l'équation de Poisson

$$-Lf = V. \tag{3.1}$$

Étant donné, que $f$ est dans $D(L)$, il est clair d'après les remarques faites au chapitre deux que

$$M_t = f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t Lf(X_s) ds$$

est une martingale adaptée à la filtration naturelle du processus $X_t$ et dont la variation quadratique est donnée par

$$< M, M >_t = \int_0^t ds\{ \ Lf^2(X_s) - 2f(X_s)Lf(X_s)\}.$$

Comme $f$ est solution de l'équation de Poisson 3.1, la fonctionnelle additive $Z_t$ peut s'écrire en fonction de la martingale $M_t$

$$\frac{1}{\sqrt{t}}\int_0^t V(X_s)ds = \frac{M_t}{\sqrt{t}} + \frac{f(X_0)-f(X_t)}{\sqrt{t}}.$$

En vertu de la stationnarité de $X_t$ sous $\mathbb{P}_\pi$

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_\pi[(f(X_t)-f(X_0))^2] \leq \frac{4}{t}\mathbb{E}_\pi[(f(X_0)]^2,$$

et

$$\lim_{t\longrightarrow\infty}\frac{f(X_t)-f(X_0)}{\sqrt{t}} = 0 \quad \text{dans } L^2(\mathbb{P}_\pi).$$

Pour prouver que $Z_t$ converge en loi vers une gaussienne centrée d'une variance $\sigma^2$, il reste juste à montrer que $M_t$ vérifie les conditions du théorème 3.

D'une part la martingale $M_t$ est à accroissements stationnaires car $X_t$ est lui même stationnaire sous $\mathbb{P}_\pi$. D'autre part, compte tenue de l'expression de la variation quadratique de $M$ et de l'ergodicité de $\pi$,

$$\frac{< M, M >_t}{t} \longrightarrow \mathbb{E}_\pi[(Lf^2 - 2fLf)] \quad \text{dans } L^2(\mathbb{P}_\pi)$$

lorsque $t \uparrow \infty$ et $\mathbb{E}_\pi[(Lf^2 - 2fLf)] = 2 < f, (-L)f >_\pi$, où $< ., . >_\pi$ est le produit scalaire sur $L^2(\pi)$. Enfin comme $M_t$ s'annule en zéro, par le théorème 3, $Z_t$ converge en distribution vers une gaussienne centrée de variance $\sigma^2 = 2 < f, (-L)f >_\pi$.

**Remarque 2** *L'existence de la solution de l'équation de Poisson 3.1 dans $L^2(\pi)$ est une condition forte qui doit être affaiblie. Pour celà on s'intéresse à l'application $\lambda I - L$ pour $\lambda > 0$ où la surjection assure l'existence de la solution $f_\lambda$ dans $L^2(\pi)$ de l'équation résolvante $\lambda f_\lambda - Lf_\lambda = V$. On commence d'abord par introduire les espaces de Sobolev $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}_{-1}$.*

## 3.2 Les espaces de Sobolev $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_{-1}$

Considérons la semi-norme $\|.\|_1$ définie sur $D(L)$ le domaine du générateur $L$ par

$$\|f\|_1^2 =< f, (-L)f >_\pi \; . \tag{3.2}$$

Soit $\sim_1$ la relation d'équivalence sur $D(L)$ définie par $f \sim_1 g$ si $\|f-g\|_1 = 0$. Notons par $\mathcal{G}_1$ l'espace normé $(D(L)|_{\sim_1}, \|.\|_1)$. L'identité du parallélogramme étant vérifiée

$$\|f+g\|_1^2 + \|f-g\|_1^2 = 2\|f\|_1^2 + 2\|g\|_1^2,$$

l'espace $\mathcal{H}_1$ obtenu par complétion de $\mathcal{G}_1$ par rapport à la norme $\|.\|_1$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire donné par l'identité de polarisation

$$< f, g >_1 = \frac{1}{4}\{\|f+g\|_1^2 - \|f-g\|_1^2\}.$$

Notons que dans cette définition seul $S = (1/2)\,(L + L^*)$ la partie symétrique du générateur intervient
$$\|f\|_1^2 =< f, (-L)f >_\pi =< f, (-S)f >_\pi \ .$$
Par l'identité de polarisation, il est simple de voir que si $f$ et $g$ sont dans $D(L)$, alors
$$< f, g >_1 =< f, (-S)g >_\pi,$$
et $\|c\|_1 = 0$ pour toute constante.

On définit maintenant $\mathcal{H}_{-1}$ le dual de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_1$ comme suit. Considérons la semi-norme
$$\|f\|_{-1}^2 = \sup_{g \in D(L)} \{2 < f, g >_\pi - \|g\|_1^2\}, \quad f \in L^2(\pi).$$
Sur $\mathcal{G}_{-1}^0$ le sous espace de $L^2(\pi)$ constitué des fonctions telles que $\|.\|_{-1}$ soit finie, on introduit la relation d'équivalence $\sim_{-1}$ définie par $f \sim_{-1} g$ si $\|f - g\|_{-1} = 0$.

Notons par $\mathcal{G}_{-1}$ l'espace normé $(\mathcal{G}_{-1}^0|_{\sim_{-1}}, \|.\|_{-1})$. L'espace $\mathcal{H}_{-1}$ obtenu par complétion de $\mathcal{G}_{-1}$ par rapport à la norme $\|.\|_{-1}$ est encore un espace de Hilbert dont le produit scalaire est donné par l'identité de polarisation.

Le lemme suivant donne quelques propriétés des espaces $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_{-1}$ qu'on utilisera par la suite.

**Lemme 2** *Pour toutes $f \in D(L)$ et $g \in L^2(\pi) \cap \mathcal{H}_{-1}$*
$$< f, g >_\pi \leq \|f\|_1 \|g\|_{-1}. \tag{3.3}$$
*Une fonction $f \in D(L)$ est dans $\mathcal{H}_{-1}$ si et seulement s'il existe une constante finie $C_0$ telle que*
$$< f, g >_\pi \leq C_0 \|g\|_1. \tag{3.4}$$
*Dans ce cas $\|f\|_{-1} \leq C_0$.*

Preuve — De la définition de la norme sur $\mathcal{H}_{-1}$, pour tout réel $a$ on a
$$2a < g, f >_\pi - a^2 \|f\|_1^2 \leq \|g\|_{-1}^2.$$
Par négativité du discriminant $\Delta =< g, f >_\pi^2 - \|g\|_{-1}^2 \|f\|_1^2$,
$$< g, f >_\pi^2 \leq \|g\|_{-1}^2 \|f\|_1^2.$$
La deuxième assertion est une simple conséquence de 3.3 et de la définition de la norme $\|.\|_{-1}$. □

Un autre résultat topologique concernant les espaces $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_{-1}$ dont on trouvera une preuve dans [6], une fonction $f$ est dans $\mathcal{H}_{-1}$ si et seulement s'il existe une fonction $h$ dans le domaine de $\sqrt{(-S)}$ telle que $\sqrt{(-S)}h = f$. Dans ce cas $\|f\|_{-1} = \|f\|_{L^2(\pi)}$, ce qui signifie que
$$\|f\|_{-1}^2 =< h, h >_\pi =< (-S)^{-1/2} f, (-S)^{-1/2} f >_\pi =< (-S)^{-1} f, f >_\pi,$$

car $S$ est symétrique.

On donne maintenant le résultat principal de ce chapitre. Fixons une fonction $V$ dans $L^2(\pi) \cap \mathcal{H}_{-1}$ et $\lambda > 0$, considérons l'équation résolvante

$$\lambda f_\lambda - L f_\lambda = V. \tag{3.5}$$

**Théorème 4** *Supposons que*

$$\sup_{0<\lambda\leq 1} \|Lf_\lambda\|_{-1} < \infty. \tag{3.6}$$

*Alors* $(1/\sqrt{t})\int_0^t V(X_s)ds$ *converge en loi vers une variable aléatoire gaussienne centrée de variance*

$$\sigma^2 = \lim_{\lambda \longrightarrow 0} \|f_\lambda\|_1^2.$$

Notons que

$$\sup_{0<\lambda\leq 1} \|Lf_\lambda\|_{-1} < \infty \quad \text{si et seulement si} \quad \sup_{0<\lambda\leq 1} \|\lambda f_\lambda\|_{-1} < \infty, \tag{3.7}$$

car $V \in \mathcal{H}_{-1}$.

La preuve de ce théorème est faite en deux parties. Dans un premier temps on donne une majoration de la variance limite de $(1/\sqrt{t})\int_0^t V(X_s)ds$, on montre qu'elle est majorée par un multiple de $\|V\|_{-1}$. Dans le cas où le générateur est symétrique i.e. $\pi$ est une mesure réversible pour le processus de Markov $X_t$, la variance limite sera égale à $2\|V\|_{-1}^2$. Par la suite on montre le théorème centrale limite pour la fonctionnelle additive sous les conditions

$$\lim_{\lambda \longrightarrow 0} \lambda \|f_\lambda\|_{L^2(\pi)} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\lambda \longrightarrow 0} \|f_\lambda - f\|_1 = 0,$$

pour une fonction $f \in \mathcal{H}_1$. Enfin on montre que la condition 3.6 du théorème 4 implique les conditions précédentes.

### 3.2.1 Variance limite

Dans cette partie on donne une majoration de la variance limite de $(1/\sqrt{t})\int_0^t W(X_s)ds$ pour une fonction de moyenne nulle $W$ dans $L^2(\pi)$. Soit $P_t$ le semi-groupe du processus markovien $X_t$. Par un changement de variable on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\pi\left[\frac{1}{t}\left(\int_0^t W(X_s)ds\right)^2\right] &= \tfrac{1}{t}\mathbb{E}_\pi \int_0^t ds \int_0^t dr W(X_r)W(X_s) \\ &= \tfrac{1}{t}\int_0^t ds \int_0^t dr \mathbb{E}_\pi\left(W(X_0)W(X_{|s-r|})\right). \end{aligned}$$

D'après la propriété de Markov, $\mathbb{E}_\pi(W(X_{|s-r})/\mathcal{F}_0) = P_{|s-r|}W(X_0)$ et comme $\pi$ est invariante on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t}\int_0^t ds \int_0^t dr \mathbb{E}_\pi\left[W(X_r)W(X_s)\right] &= \tfrac{1}{t}\int_0^t ds \int_0^t dr \mathbb{E}_\pi\left[W(X_0)\mathbb{E}_\pi\left(W(X_{|s-r|})/\mathcal{F}_0\right)\right] \\
&= \tfrac{1}{t}\int_0^t ds \int_0^t dr < P_{|s-r|}W, W >_\pi \\
&= 2\int_0^t ds \left(1-\frac{s}{t}\right) < P_s W, W >_\pi .
\end{aligned}$$

Si $a^+$ est la partie positive d'un réel $a$, $a^+ = \sup\{a, 0\}$ alors

$$\sigma(W)^2 = 2 \limsup_{t \longrightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \left(1-\frac{s}{t}\right)^+ < P_s W, W >_\pi .$$

Si $\pi$ est réversible i.e. $L$ est un opérateur auto-adjoint dans $L^2(\pi)$, alors $< P_s W, W > = < P_{s/2}W, P_{s/2}W >$ est positive et $\left(1-\frac{s}{t}\right) < P_s W, W >_\pi$ est donc une fonction croissante en $t$, dans ce cas par le théorème de la convergence monotone

$$\sigma(W)^2 = 2\int_0^\infty ds < P_s W, W >_\pi .$$

Dans le cas général où $\pi$ n'est pas forcément réversible, $\sigma(W)^2$ est finie grâce au lemme suivant.

**Lemme 3** *Soient $T > 0$ et $f : [0, T] \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(t, .) \in L^2(\pi) \cap \mathcal{H}_{-1}$ pour tout $0 \le t \le T$ et $f(., x)$ soit dérivable pour tout $x \in E$. Alors il existe une constante universelle $C_0$ telle que*

$$\mathbb{E}_\pi\left[\sup_{0\le t\le T}\left(\int_0^t f(s, X_s)ds\right)^2\right] \le C_0 \int_0^T ds \|f(s, .)\|_{-1}^2 .$$

Preuve — L'espace $\mathcal{C}$ étant un coeur pour le générateur $L$, il existe pour tout $\varepsilon > 0$, une fonction $h_t = h(t, .)$ dans $\mathcal{C}$ telle que $\|Sh_t - f(t, .)\|_{L^2(\pi)} \le \varepsilon$. Par la propriété de Markov le processus

$$M_t = h(t, X_t) - h(0, X_0) - \int_0^t ds(L + \partial)h(s, X_s),$$

définit sous $\mathbb{P}_\pi$ une martingale centrée adaptée à la filtration naturelle du processus $X_t$, de même

$$M_t^- = h(T-t, X_{T-t}) - h(T, X_T) - \int_0^t ds(L^* + \partial)h(T-s, X_{T-s}), \quad 0 \le t \le T$$

définit sous $\mathbb{P}_\pi$ une $\mathcal{F}_t^-$-martingale ou $\mathcal{F}_t^- = \sigma\{X_s, s \ge t\}$, $M_t^-$ est dite martingale renversée. Posant

$$Z_t = M_T^- - M_{T-t}^- \quad \text{et} \quad r(t, .) = Sh_t - f(t, .).$$

Un changement de variable permet d'écrire $Z_t$ sous la forme

$$Z_t = h(0, X_0) - h(t, X_t) = -\int_0^t ds(L^* - \partial)h(s, X_s),$$

et

$$\begin{aligned}
Z_t + M_t &= -\int_0^t ds(L + \partial)h(s, X_s) - \int_0^t ds(L^* - \partial)h(s, X_s) \\
&= -2\int_0^t ds\left(\frac{L + L^*}{2}\right)h(s, X_s) \\
&= -2\int_0^t Sh(s, X_s)ds \\
&= -2\int_0^t \{f(s, X_s) + r(s, X_s)\}.ds
\end{aligned}$$

On déduit la majoration

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\pi\left[\sup_{0\le t\le T}\left(\int_0^t f(s, X_s)ds\right)^2\right] &= \frac{1}{4}\mathbb{E}_\pi\left[\sup_{0\le t\le T}\left(M_t + Z_t + 2\int_0^t r(s, X_s)ds\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{4}\mathbb{E}_\pi\left[\sup_{0\le t\le T}\left(M_t + M_T^- - M_{T-t}^- + 2\int_0^t r(s, X_s)ds\right)^2\right] \\
&\le 3\mathbb{E}_\pi(\sup_{0\le t\le T} M_t^2) + 3\mathbb{E}_\pi(\sup_{0\le t\le T}(M_t^-)^2) \\
&+ 3\mathbb{E}_\pi\left[\sup_{0\le t\le T}\left(\int_0^t r(s, X_s)ds\right)^2\right].
\end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz et par définition de $h_t$,

$$\mathbb{E}_\pi\left[\sup_{0\le t\le T}\left(\int_0^t r(s, X_s)ds\right)^2\right] \le T\mathbb{E}_\pi\left[\sup_{0\le t\le T}\int_0^t r(s, X_s)^2 ds\right]$$

$$\le T^2 \sup_{0\le t\le T}\mathbb{E}_\pi(r(s, X_s)^2) \le T^2\varepsilon^2.$$

Par l'inégalité de Doob on a

$$\mathbb{E}_\pi[\sup_{0\le t\le T} M_t^2] \le 4\mathbb{E}\pi[M_T^2]$$

et

$$\mathbb{E}_\pi[\sup_{0\le t\le T}(M_t^-)^2] \le 4\mathbb{E}\pi[(M_T^-)^2].$$

Ainsi

$$\mathbb{E}_\pi\left[\sup_{0\le t\le T}\left(\int_0^t r(s, X_s)ds\right)^2\right] \le 3\mathbb{E}\pi[M_T^2] + 3\mathbb{E}\pi[M_T^{-2}] + 3T^2\varepsilon^2.$$

On conclut en remarquant

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\pi[M_T^2] + \mathbb{E}_\pi[(M_T^-)^2] &= \mathbb{E}_\pi(< M_T^-, M_T^- >) + \mathbb{E}_\pi(< M_T, M_T >) \\
&= -2\int_0^T \mathbb{E}_\pi\left[h(s,X_s)Lh(s,X_s)\right] - 2\int_0^T \mathbb{E}_\pi\left[h(s,X_s)L^*h(s,X_s)\right] \\
&= 4\int_0^T < h_s, -Sh_s >_\pi ds \\
&= 4\int_0^T \|h_s\|_1^2 ds = 4\int_0^T \|Sh_s\|_{-1}^2 \quad \text{(car } S \text{ est symetrique )} \\
&\leq 4\int_0^T \|f(s,.)\|_{-1}^2 + T^2\varepsilon^2,
\end{aligned}$$

enfin,

$$\mathbb{E}_\pi\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left(\int_0^t r(s,X_s)ds\right)^2\right] \leq 12\int_0^T \|f(s,.)\|_{-1}^2 + 4T^2\varepsilon^2,$$

il reste juste à faire tendre $\varepsilon$ vers 0.

□

### 3.2.2 Equation résolvante

On suppose que $V \in \mathcal{H}_{-1} \cap L^2(\pi)$, en prenant le produit scalaire par rapport à $f_\lambda$ dans l'équation résolvante, on obtient

$$\lambda < f_\lambda, f_\lambda > + \|f_\lambda\|_1^2 = < V, f_\lambda > .$$

D'après le lemme 2, $< V, f_\lambda > \leq \|V\|_{-1}\|f_\lambda\|_1$, d'où

$$\lambda < f_\lambda, f_\lambda > + \|f_\lambda\|_1^2 \leq \|V\|_{-1}\|f_\lambda\|_1.$$

Il en résulte que $\|f_\lambda\|_1 \leq \|V\|_{-1}$ et $\|V\|_{-1}\|f_\lambda\| \leq \|V\|_{-1}^2$, alors

$$\lambda < f_\lambda, f_\lambda > + \|f_\lambda\|_1^2 \leq \|V\|_{-1}^2,$$

d'où

$$\lim_{\lambda\longrightarrow 0} \lambda f_\lambda = 0 \quad \text{dans } L^2(\pi) \quad \text{et } \sup_{0<\lambda\leq 1} \|f_\lambda\|_1^2 < \infty. \tag{3.8}$$

Le but de ce paragraphe est de montrer le théorème centrale limite pour $(1/\sqrt{t})\displaystyle\int_0^t V(X_s)ds$ sous les conditions

$$\lim_{\lambda\longrightarrow 0} \lambda\|f_\lambda\|_{L^2(\pi)} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\lambda\longrightarrow 0} \|f_\lambda - f\|_1 = 0, \tag{3.9}$$

pour $f \in \mathcal{H}_1$.

**Proposition 2** *Pour toute fonction $V$ dans $\mathcal{H}_{-1} \cap L^2(\pi)$ vérifiant 3.9, alors $(1/\sqrt{t}) \int_0^t V(X_s)ds$ converge en loi vers une variable aléatoire gaussienne centrée de variance*

$$\sigma(V)^2 = 2 \lim_{\lambda \longrightarrow 0} \|f_\lambda\|_1^2.$$

Preuve — L'idée de la preuve est d'exprimer $\int_0^t V(X_s)ds$ comme la somme d'une martingale et d'un terme qui s'annule à la limite afin d'appliquer à nouveau le théorème centrale limite pour les matingales.

Pour $\lambda > 0$ fixé, soit $M_t^\lambda$ la martingale définie par

$$M_t^\lambda = f_\lambda(X_t) - f_\lambda(X_0) - \int_0^t Lf_\lambda(X_s)ds,$$

d'où

$$\int_0^t V(X_s)ds = M_t^\lambda + f_\lambda(X_0) - f_\lambda(X_t) + \lambda \int_0^t f_\lambda(X_s)ds. \tag{3.10}$$

**Lemme 4** *Il existe une martingale $M_t$ telle que*

$$M_t^\lambda \longrightarrow M_t \quad \text{et} \quad \lambda \int_0^t f_\lambda(X_s)ds \longrightarrow 0, \quad \text{dans } L^2(\pi)$$

*lorsque $\lambda \downarrow 0$.*

Preuve — On commence par montrer que $(M_t^\lambda)_\lambda$ est une suite de Cauchy. En effet pour $\lambda > 0$ et $\lambda' > 0$ fixés, comme $\pi$ est invariante, l'expression de la variation quadratique de la martingale $M_t^\lambda - M_t^{\lambda'}$ est donnée par

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\pi\left[\left(M_t^\lambda - M_t^{\lambda'}\right)^2\right] &= \mathbb{E}_\pi\left[\int_0^t \left[Lf_{\lambda\lambda'}(X_s)^2 - 2f_{\lambda\lambda'}(X_s)Lf(X_s)\right]\right] \\
&= 2\int_0^t ds < f_{\lambda\lambda'}, (-L)f_{\lambda\lambda'} >_\pi \\
&= 2t\|f_\lambda - f_{\lambda'}\|_1^2,
\end{aligned}$$

où $f_{\lambda\lambda'} = f_\lambda - f_{\lambda'}$. Sous les conditions 3.9 de la proposition, $f_\lambda$ converge dans $\mathcal{H}_1$. La suite $(M_t^\lambda)_\lambda$ est donc une suite de cauchy dans $L^2(\pi)$ est donc converge vers une martingale $M_t$. La deuxième assertion de ce lemme s'obtient par application de l'inégalité de Cauchy-Schwartz.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\pi\left[\left(\int_0^t f_\lambda(X_s)ds\right)^2\right] &\leq \mathbb{E}_\pi\left[\int_0^t f_\lambda(X_s)^2 ds\right] \\
&\leq t^2\mathbb{E}_\pi(f_\lambda(X_0)^2) = t^2\|f_\lambda\|_{L^2(\pi)}^2.
\end{aligned}$$

□

D'après l'identité 3.10 et ce dernier lemme, $f_\lambda(X_0) - f_\lambda(X_t)$ converge aussi dans $L^2(\pi)$ lorsque $\lambda \downarrow 0$. Notons $R_t$ cette limite, d'où

$$\int_0^t V(X_s)ds = M_t + R_t.$$

**Lemme 5** *$\frac{1}{\sqrt{t}}R_t$ s'annule dans $L^2(\pi)$, lorsque $t \uparrow \infty$.*

Preuve — Considérons le processus

$$R_t = \int_0^t V(X_s)ds - M_t.$$

La fonction $f_\lambda$ étant solution de l'équation résolvante

$$\int_0^t V(X_s)ds = \lambda \int_0^t f_\lambda(X_s)ds - \int_0 Lf_\lambda(X_s)ds,$$

alors

$$R_t = M_t^\lambda - M_t + f_\lambda(X_0) - f_\lambda(X_t) + \lambda \int_0^t f_\lambda(X_s)\ ds. \tag{3.11}$$

Compte-tenu de la convergence de $M_t^\lambda$ vers $M_t$ dans $L^2(\pi)$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\pi\left[\left(M_t^\lambda - M_t^{\lambda'}\right)\right] &= \lim_{\lambda' \longrightarrow 0} \mathbb{E}_\pi\left[\left(M_t^\lambda - M_t^{\lambda'}\right)\right] \\
&= \lim_{\lambda' \longrightarrow 0} 2t\|f_\lambda - f_{\lambda'}\|_1^2 \\
&= 2t\|f_\lambda - f\|_1^2.
\end{aligned}$$

Intéressons nous maintenant au second terme de l'équation 3.11, on a

$$\mathbb{E}_\pi\left[(f_\lambda(X_0) - f_\lambda(X_t))^2\right] \leq 4\|f_\lambda\|^2_{L^2(\pi)}.$$

Pour le dernier terme de 3.11 par un calcul précédent on a

$$\mathbb{E}_\pi\left[\left(\int_0^t f_\lambda(X_s)ds\right)^2\right] \leq t^2\|f_\lambda\|^2_{L^2(\pi)}.$$

Enfin

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}_\pi(R_t^2) \leq 6\|f_\lambda - f\|_1^2 + 3\|f_\lambda\|^2_{L^2(\pi)}\left(\frac{4}{t} + t\lambda^2\right),$$

pour tout $\lambda > 0$. Posons $\lambda = \frac{1}{t}$ dans l'inégalité précédente on obtient en vertu des hypothèses faites dans cette partie la convergence de $(1/\sqrt{t})R_t$ vers zéro dans $L^2(\pi)$. Ceci achève la preuve de ce lemme. □

Enfin la preuve de la proposition 2 i.e. la convergence en loi de la fonctionnelle additive vers une variable aléatoire gaussienne centrée de variance $\sigma(V)^2$ résulte alors du théorème centrale limite des martingale et du lemme précédent. En utilisant la stationnarité des accroissements de la martingale $M_t$ on obtient

$$\mathbb{E}_\pi[< M, M >_n] = \sum_{k=0}^{n-1}[(M_{k+1} - M_k)^2] = n\mathbb{E}_\pi(M_1^2).$$

Il s'en suit que

$$\sigma(V)^2 = \lim_{t \longrightarrow +\infty} \mathbb{E}_\pi \left[ \frac{< M, M >_t}{t} \right] = \mathbb{E}_\pi(M_1^2) = 2 \lim_{\lambda \longrightarrow 0} \|f_\lambda\|_1^2 = 2 \lim_{\lambda \longrightarrow 0} < V, f_\lambda >_\pi .$$

□

### 3.2.3 L'estimation dans $\mathcal{H}_{-1}$

On a montré le théorème centrale limite pour la fonctionnelle additive sous les conditions 3.9 et $V$ dans $\mathcal{H}_{-1} \cap L^2(\pi)$. Dans cette partie on montre que si la condition 3.6 est vérifiée alors 3.9 l'est aussi. Avant on donne un résultat d'analyse fonctionelle qu'on utilisera pour la preuve du lemme principal de cette partie.

**Proposition 3** *Sur un espace de Hilbert dont le produit scalaire est noté par $< .,. >$, considérons la suite $u_n$ qui converge faiblement vers $u$ et tel que*

$$\limsup_{n \geq 1} < u_n, u_n >< \infty.$$

*Il existe une suite $v_n$ obtenue par combinaison convexe de $u_n$ et qui converge fortement vers $u$.*

**Lemme 6** *Soit $V$ une fonction dans $L^2(\pi) \cap \mathcal{H}_{-1}$. Supposons qu'il existe une constante finie $C_0$ telle que*

$$\sup_{\lambda > 0} \|Lf_\lambda\|_{-1} \leq C_0.$$

*Alors il existe une fonction $f$ dans $\mathcal{H}_1$ telle que*

$$\lim_{\lambda \longrightarrow 0} \lambda \|f_\lambda\|_{L^2(\pi)} = 0 \quad et \quad \lim_{\lambda \longrightarrow 0} \|f_\lambda - f\|_1 = 0.$$

Preuve — On déjà vu d'après l'équation de la résolvante 3.5 que

$$\sup_{0<\lambda\leq 1} \|f_\lambda\|_1 \leq \|V\|_{-1} \quad \text{et} \quad \sup_{0<\lambda\leq 1} \lambda < f_\lambda, f_\lambda >_\pi \leq \|V\|_{-1}^2.$$

Donc $\lambda f_\lambda$ converge vers zéro dans $L^2(\pi)$ lorsque $\lambda \uparrow 0$.

Comme $\sup_{\lambda>0} \|Lf_\lambda\|_{-1}$ est borné, de toute suite $\lambda \downarrow 0$ on peut extraire une sous suite qu'on notera toujours $\lambda_n$ telle que $Lf_{\lambda_n}$ converge faiblement dans $\mathcal{H}_{-1}$ vers une fonction $U$. Fixons une fonction $g$ dans $L^2(\pi) \cap \mathcal{H}_1$, comme $Lf_{\lambda_n}$ converge faiblement vers $U$,

$$< Lf_{\lambda_n}, g >_\pi \longrightarrow < U, g >_\pi,$$

lorsque $n \uparrow \infty$. D'autre part comme $f_{\lambda_n}$ est la solution de l'équation résolvante

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} < Lf_{\lambda_n}, g >_\pi = - < V, g > + \lim_{n\longrightarrow} < \lambda_n f_{\lambda_n}, g >_\pi .$$

Cette dernière expression est égale à $- < V, g >$, puisque $\lambda f_\lambda$ converge fortement vers zéro dans $L^2(\pi)$ lorsque $\lambda \downarrow 0$. Donc $< U, g >_\pi = - < V, g >_\pi$ pour tout $g$ dans $L^2(\pi) \cap \mathcal{H}_1$. Comme $L^2(\pi) \cap \mathcal{H}_1$ est dense dans $\mathcal{H}_1$, alors

$$< U, g >_\pi = - < V, g >_\pi, \quad \forall g \in L^2(\pi),$$

d'où $U = -V$.

De la même manière, comme $\sup_{\lambda>0} \|f_\lambda\|_1$ est borné, de toute suite $\lambda_n \downarrow 0$ on peut extraire une sous-suite qu'on notera toujours $\lambda_n$ pour laquelle $f_{\lambda_n}$ converge faiblemet dans $\mathcal{H}_1$ vers une fonction $W$.

En appliquant la proposition 3 pour les suites $f_{\lambda_n}$ et $Lf_{\lambda_n}$, on peut donc trouver une suite $u_n$ telle que $u_n$ ($Lu_n$ resp.) converge fortement vers $W$ ($-V$ resp.) dans $\mathcal{H}_1$ ($\mathcal{H}_{-1}$resp.), on a $< u_n, Lu_n >_\pi$ converge vers $- < W, V >_\pi$. Comme $- < u_n, Lu_n >_\pi = \|u_n\|_1^2$ et $\|u_n\|_1^2$ converge vers $\|W\|_1^2$, d'où $\|W\|_1^2 =< W, V >_\pi$ .

Montrons maintenant que $\lim_{\lambda\longrightarrow0} < f_\lambda, f_\lambda >_\pi = 0$. Procédons par l'absurde. Supposons que $\lambda < f_\lambda, f_\lambda >_\pi$ ne converge pas vers zéro. Dans ce cas il existe $\varepsilon > 0$ et une suite $\lambda_n \downarrow 0$ tel que $\lambda_n < f_{\lambda_n}, f_{\lambda_n} >_\pi \geq \varepsilon$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Dans ce qui précède on a montré l'existence d'une sous-suite $\lambda'_n$ pour laquelle $f_{\lambda'_n}$ converge faiblement dans $\mathcal{H}_1$ vers une fonction $W$ vérifiant la relation

$$< W, V >_\pi = \|W\|_1^2.$$

Comme $f_\lambda$ est solution de l'équation résolvante

$$\begin{aligned} \limsup_{n'\longrightarrow+\infty} \|f_{\lambda_{n'}}\|_1^2 &\leq \limsup_{n'\longrightarrow\infty} \left\{ \lambda'_n \|f_{\lambda_{n'}}\|_{L^2(\pi)}^2 + \|f_{\lambda_{n'}}\|_1^2 \right\} \\ &= \limsup_{n'\longrightarrow\infty} < f_{\lambda_{n'}}, V >=< W, V >= \|W\|_1^2 \leq \|f_{\lambda_{n'}}\|_1^2. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Ceci contredit le fait que $\lambda_n < f_{\lambda_n}, f_{\lambda_n} >_\pi \geq \varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi on aura montré que $\lim_{\lambda\longrightarrow0} < f_\lambda, f_\lambda >_\pi = 0$.

D'après 3.12 on a aussi la convergence forte de $f_{\lambda_{n'}}$ vers $W$ dans $\mathcal{H}_1$. En particulier de toute suite $\lambda_n$ on peut extraire une sous-suite $\lambda_{n'}$ pour laquelle $f_{\lambda_{n'}}$ converge fortement dans $\mathcal{H}_1$. Pour montrer que $f_\lambda$ converge fortement, il reste à montrer l'unicité de la limite.

Soient $\lambda_n$ et $\mu_n$ deux suites décroissantes et telles que

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \lambda_n = 0 \quad \text{et} \qquad \lim_{n\longrightarrow+\infty} \mu_n = 0.$$

Soient $W_1$ et $W_2$ les limites fortes dans $\mathcal{H}_1$ de $f_{\lambda_n}$ et $f_{\mu_n}$ respectivement. Comme $f_\lambda$ est une solution de l'équation résolvante

$$< \lambda_n f_{\lambda_n} - \mu_n f_{\mu_n}, f_{\lambda_n} - f_{\mu_n} >_\pi + \|f_{\lambda_n} - f_{\mu_n}\|_1^2 = 0,$$

pour tout $n$. Comme $f_{\lambda_n}$ $f_{\mu_n}$ converge fortement vers $W_1$, $W_2$ dans $\mathcal{H}_1$, alors

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \|f_{\lambda_n} - f_{\mu_n}\|_1^2 = \|W_1 - W_2\|_1^2.$$

On a montré que $\lim\limits_{\lambda\longrightarrow 0} \lambda\|f_\lambda\|_{L^2(\pi)}^2 = 0$, d'où

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} < \lambda_n f_{\lambda_n} - \mu_n f_{\mu_n}, f_{\lambda_n} - f_{\mu_n} >_\pi = -\lim_{n\longrightarrow\infty} \left\{< \lambda_n f_{\lambda_n}, f_{\mu_n} >_\pi + < \mu_n f_{\mu_n}, f_{\lambda_n} >_\pi\right\}.$$

Chaque terme de la dernière expression s'annule lorsque $n \uparrow \infty$, en effet

$$\lambda_n < f_{\lambda_n}, f_{\mu_n} >_\pi = \lambda_n < f_{\lambda_n}, f_{\mu_n} - W_2 >_\pi + \lambda_n < f_{\lambda_n}, W_2 >_\pi .$$

Par l'inégalité 3.3 du lemme 2

$$\lambda_n < f_{\lambda_n}, f_{\mu_n} - W_2 >_\pi \leq \|Lf_{\lambda_n}\|_{-1}\|f_{\mu_n} - W_2\|_1.$$

Comme $\lambda f_\lambda$ est bornée dans $\mathcal{H}_{-1}$ et $f_{\mu_n}$ converge vers $W_2$ dans $\mathcal{H}_1$, ce dernier terme s'annule aussi. Enfin comme $\lambda f_\lambda$ converge faiblement vers zéro dans $\mathcal{H}_{-1}$ et $W_2 \in \mathcal{H}_1$ alors $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \lambda_n < f_{\lambda_n}, W_2 >_\pi = 0$. Ceci conclut la preuve de ce lemme. □

La preuve du théorème 4 découle du lemme précédent et de la proposition 2.

## 3.3 Exemples

Fixons une fonction $V$ dans $L^2(\pi) \cap \mathcal{H}_{-1}$. Dans cette partie on donne trois cas où la solution $f_\lambda$ de l'équation résolvante 3.5 satisfait la condition

$$\sup_{0<\lambda\leq 1} \|Lf_\lambda\|_{-1} < \infty.$$

### 3.3.1 Réversibilité

Supposons que le générateur $L$ est auto-adjoint dans $L^2(\pi)$. Dans ce cas on a, pour tout $a \in \mathbb{R}$

$$< af + g, (-L)(af + g) >_\pi = a^2\|f\|_1^2 - 2a < Lf, g >_\pi + \|g\|_1^2 \geq 0$$

donc

$$2a < Lf, g >_\pi - a^2\|f\|_1^2 \leq \|g\|_1^2$$

et par négativité du discriminant on aura

$$< Lf, g >_\pi^2 \leq \|f\|_1^2\|g\|_1^2$$

il s'en suit que

$$\|Lf\|_{-1} \leq \|f\|_1,$$

ainsi $Lf$ est dans $\mathcal{H}_{-1}$. Dans le cas réversible la condition 3.6 est une conséquence de 3.8 et c'est cette même condition qui donne $\sigma(V)^2 = 2\lim\limits_{\lambda\longrightarrow 0} \|f_\lambda\|_1^2$.

### 3.3.2 La condition du secteur

Supposons que le générateur $L$ satisfait la condition du secteur : il existe une constante $C_0$ telle que

$$< f, Lg >_\pi^2 \leq C_0 < f, (-L)f >_\pi < g, (-L)g >_\pi,$$

pour toutes $f$ et $g$ dans le domaine de $L$. En vertu de 3.3 on a pour toute $g$ dans $D(L)$

$$\|Lg\|_{-1} \leq C_0 \|g\|_1.$$

La condition 3.6 découle de 3.8 dans ce cas aussi. L'inégalité précédente signifie que $L$ est un opérateur borné de $\mathcal{H}_1$ dans $\mathcal{H}_{-1}$. Il est clair que la partie symetrique du générateur $L$ vérifie cette propriété ($\|Sg\|_{-1} \leq \|g\|_1, \forall g \in \mathcal{H}_1$). Donc pour que $L$ soit borné il faut et il suffit que $A = \left(\frac{L-L^*}{2}\right)$ la partie asymétrique du générateur $L$ soit bornée de $\mathcal{H}_1$ dans $\mathcal{H}_{-1}$ i.e.,

$$\begin{aligned} \|Ag\|_{-1}^2 &= < Ag, (-S)^{-1} Ag >_\pi \\ &= < g, A^*(-S)^{-1} Ag >_\pi \\ &\leq C_0 \|g\|_1^2 = C_0 < g, (-S)g >_\pi, \end{aligned}$$

pour tout $g$ dans $D(L)$. La condition du secteur peut s'écrire encore sous la forme

$$A^*(-S)^{-1} A \leq C_0(-S),$$

pour une constante $C_0$. Il s'en suit que

$$(-S) \leq (-S) + A^*(-S)^{-1} A \leq (1 + C_0)(-S)$$

et

$$C_1^{-1} \sigma(V)^2 \leq \|V\|_{-1}^2 \leq C_1 \sigma(V)^2,$$

pour une constante $C_1$. Cela signifie que sous la condition du secteur, la variance limite est finie si et seulement si la fonction $V$ est dans $\mathcal{H}_{-1}$.

### 3.3.3 La condition du secteur gradué

Maintenant au lieu de supposer que le généarteur $L$ satisfait la condition du secteur sur $L^2(\pi)$ tout entier, on décompose $L^2(\pi)$ comme une somme directe d'espaces $A_n$ orthogonaux et on suppose que sur chaque $A_n$, le générateur $L$ satisfait la condition su secteur avec une constante qui peut être différente.

Supposons que $L^2(\pi)$ peut être décomposé en somme directe $\oplus_{n \geq 0} A_n$ d'espaces orthogonaux.

Une fonction $f$ dans $A_n$ est dite de degré $n$. Pour $n \geq 0$ notons par $\pi_n$ la projection orthogonale telle que

$$f = \sum_{n \geq 0} \pi_n f \quad \text{et} \quad \pi_n f \in A_n,$$

pour tout $n \geq 0$ et $f$ dans $L^2(\pi)$.

Supposons que le générateur $L$, conserve le degré de la fonction ou le fait changer de un, i.e.

$$L : D(L) \cap A_n \longrightarrow A_{n-1} \cup A_n \cup A_{n+1}.$$

Notons par $L_-$ (rep. $L_+$ et $L_0$) la partie qui fait décroître (croître, conserve ) le degré de la fonction.

Supposons que $L_0$ peut se décomposer sous la forme

$$L_0 = R_0 + B_0,$$

où $-R_0$ est un opérateur positif borné par $-C_0 L$ pour une constante $C_0$.

$$0 \leq < f, (-R_0)f >_\pi \leq C_0 < f, (-L)f >_\pi, \tag{3.13}$$

pour toute fonction dans $D(L)$.

Comme $-R_0$ est positif, on rèppéte les mêmes étapes de la sction 3.2 avec $R_0$ à la place de $L$. On définit les espaces de Sobolev $\mathcal{H}_{0,1}, \mathcal{H}_{0,-1}$ et les normes $\|.\|_{0,1}$ et $\|.\|_{0,-1}$ associés à $R_0$.

Comme $R_0$ conserve le degré de la fonction, alors

$$\begin{aligned}
\|f\|_{0,1}^2 &= < f, (-R_0)f >_\pi \\
&= < \sum_n \pi_n f, (-R_0) \sum_n \pi_n f >_\pi \\
&= \sum_n < \pi_n f, (-R_0)\pi_n f >_\pi = \sum_n \|\pi_n f\|_{0,1}^2 \quad (\text{car} - R_0(\pi_n f) \in A_n),
\end{aligned}$$

pour toute fonction dans le domaine du générateur.

Pour les mêmes précédentes raisons, pour toute fonction $f$ dans $L^2(\pi)$,

$$\|f\|_{0,-1}^2 = \sup_{g \in D(L)} \{2 < \sum_n \pi_n f, g >_\pi - \|g\|_{0,1}^2\} \leq \sum_{n \geq 0} \|\pi_n f\|_{0,1}^2,$$

l'égalité s'obtient en prenant un exemple où cette borne est atteinte, soit $f = \pi_{n_0} f$ pour un $n_0$ fixé.

L'inégalité 3.13 peut s'écrire en terme de norme comme suit

$$\|f\|_{0,1} \leq \sqrt{C_0} \|f\|_1,$$

pour toute fonction dans le domaine du générateur et pour une constante $C_0$ finie.

De même en vertu de la définition des normes $\|.\|_{0,-1}$ et $\|.\|_{-1}$ on a

$$\begin{aligned}
\|f\|_{-1}^2 &= \sup_{g \in D(L)} \{2 < f, g >_\pi - \|g\|_1^2\} \\
&\leq \frac{1}{C_0} \sup_{g \in D(L)} \{2 < C_0 f, g >_\pi - \|g\|_{0,1}^2\} \\
&\leq C_0 \|f\|_{0,-1}^2.
\end{aligned}$$

Ainsi
$$\|f\|_{-1} \leq \sqrt{C_0}\|f\|_{0,-1}, \tag{3.14}$$
pour toute fonction $f$ dans $L^2(\pi)$ et la même constante $C_0$. Supposons maintenant que la condition du secteur soit réalisée sur chaque sous espace $A_n$ avec une constante qui dépend de $n$. Il existe $B < 1$ et une constante $C_0$ tel que

$$\begin{cases} < f,(-L_+)g >_\pi^2 \leq C_0 n^{2B} < f,(-R_0)f >_\pi < g,(-R_0)g >_\pi \\ \\ < g,(-L_-)f >_\pi^2 \leq C_0 n^{2B} < f,(-R_0)f >_\pi < g,(-R_0)g >_\pi, \end{cases} \tag{3.15}$$

pour toutes fonctions $g \in D(L) \cap A_n$ et $f \in D(L) \cap A_{n+1}$. Il s'en suit que

$$\|L_+ g\|_{0,-1} \leq \sqrt{C_0} n^B \|g\|_{0,1}$$

et
$$\|L_- f\|_{0,-1} \leq \sqrt{C_0} n^B \|f\|_{0,1},$$
pour toutes fonctions $g \in D(L) \cap A_n$ et $f \in D(L) \cap A_{n+1}$.

**Lemme 7** *Soit $V$ une fonction dans $L^2(\pi)$ telle que*

$$\sum_{n\geq 0} n^{2k}\|\pi_n V\|_{0,-1}^2 < \infty.$$

*Si $f_\lambda$ est une solution de l'équation résolvante 3.5. Il existe alors une constante $C_1$ dépendant juste de $B, k$ et $C_0$ telle que*

$$\sum_{n\geq 0} n^{2k}\|\pi_n f_\lambda\|_{0,1}^2 \leq C_1 \sum_{n\geq 0} n^{2k}\|\pi_n V\|_{0,-1}^2.$$

Preuve — Soit $\{t_n, n \geq 0\}$ une suite croissante qu'on fixera plus tard. Notons par $T : L^2(\pi) \longrightarrow L^2(\pi)$ l'opérateur qui est le multiple de l'identité sur chaque $A_n$,

$$Tf = \sum_{n\geq 0} t_n \pi_n f.$$

En appliquant $T$ et en prenant le produit scalaire par rapport à $Tf_\lambda$ dans l'équation de la résolvante 3.5 on obtient

$$\begin{aligned} &\lambda < Tf_\lambda, Tf_\lambda >_\pi - < Tf_\lambda, TLf_\lambda >_\pi \\ &=< Tf_\lambda, TV >_\pi + < Tf_\lambda, -LTf_\lambda >_\pi + < Tf_\lambda, LTf_\lambda >_\pi, \end{aligned}$$

et

$$\lambda < Tf_\lambda, Tf_\lambda >_\pi - < Tf_\lambda, LTf_\lambda >_\pi =< Tf_\lambda, TV >_\pi - < Tf_\lambda, LTf_\lambda - TLf_\lambda >_\pi,$$

alors

$$\lambda < Tf_\lambda, Tf_\lambda >_\pi - < Tf_\lambda, LTf_\lambda >_\pi = < Tf_\lambda, TV >_\pi - < Tf_\lambda, [L,T]f_\lambda >_\pi,$$

où $[L,T]f_\lambda = LTf_\lambda - TLf_\lambda$. Par l'hypothèse 3.13 on obtient

$$\begin{aligned}
\lambda < Tf_\lambda, Tf_\lambda >_\pi + < Tf_\lambda, (-L)Tf_\lambda >_\pi &\geq C_0^{-1} < Tf_\lambda, (-R_0)Tf_\lambda >_\pi \\
&= C_0^{-1}\|Tf_\lambda\|_{0,1}^2 \\
&= C_0^{-1}\sum_{n\geq 0} t_n^2\|\pi_n f_\lambda\|_{0,1}^2.
\end{aligned}$$

Soit $\delta > 0$. Dans ce qui va suivre on estimera le produit scalaire $< Tf_\lambda, [L,T]f_\lambda >_\pi$ en terme de $\|Tf_\lambda\|_{0,1}^2$. Comme $T$ commute avec tout opérateur qui conserve le degré en particulier avec $L_0$ on a donc

$$[L,T] = [L_+ + L_-, T].$$

Afin de fixer les idées, considérons juste l'opérateur $[L_+, T]$ l'autre sera estimé de la même manière. Comme $L_+$ fait croître de un le degré de $f$, par définition de crochet $[,]$, pour tout $f$ dans $D(L)$ on a

$$\pi_n[L_+, T]f = L_+T\pi_{n-1}f - TL_+\pi_{n-1}f = (t_{n-1} - t_n)L_+\pi_{n-1}f.$$

Alors

$$\begin{aligned}
< TF_\lambda, [L_+,T]f_\lambda >_\pi &= \sum_{n\geq 0} < \pi_n Tf_\lambda, \pi_n[L_+,T]f_\lambda >_\pi \\
&= \sum_{n\geq 0}(t_{n-1} - t_n)t_n < \pi_n f_\lambda, L_+\pi_{n-1}f_\lambda >_\pi .
\end{aligned}$$

Par l'hypothèse 3.15 et comme la suite $t_n$ est croissante alors

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0}(t_{n-1} - t_n)t_n < \pi_n f_\lambda, L_+\pi_{n-1}f_\lambda >_\pi &\leq \sum_{n\geq 0}(t_{n-1} - t_n)t_n C_0 n^B\|\pi_n f_\lambda\|_{0,1}\|\pi_{n-1}f_\lambda\|_{0,1} \\
&\leq \tfrac{1}{2}\sum_{n\geq 0}(t_{n-1} - t_n)t_n C_0 n^B\|\pi_n f_\lambda\|_{0,1}^2 \\
&\quad \tfrac{1}{2}\sum_{n\geq 0}(t_{n-1} - t_n)t_n C_0 n^B\|\pi_{n-1} f_\lambda\|_{0,1}^2.
\end{aligned}$$

Comme $B < 1$, il existe $n_1 = n_1(C_0, B, \delta, k)$ tel que

$$C_0 n^B\left\{1 - \frac{(n-1)^{2k}}{n^{2k}}\right\} \leq \delta \quad \text{et} \quad C_0 n^B\left\{\frac{n^{2k}}{(n-1)^{2k}} - 1\right\}\frac{n^{2k}}{(n-1)^{2k}} \leq \delta,$$

pour tout $n \geq n_1$. Fixons $n_2 > n_1$ et posons

$$t_n = n_1^{2k}\mathbb{1}_{\{n<n_1\}} + n^{2k}\mathbb{1}_{\{n_1\leq n\leq n_2\}} + n^{2k}\mathbb{1}_{\{n>n_2\}}.$$

Avec cette définition de $t_n$ l'expression précédente est bornée par

$$\begin{aligned}
&\leq \tfrac{1}{2}\sum_{n\geq 0}\left(1-\frac{t_{n-1}}{t_n}\right)t_n^2C_0n^B\|\pi_nf_\lambda\|_{0,1}^2\\
&+\tfrac{1}{2}\sum_{n\geq 0}\frac{t_{n-1}}{t_n}\left(\frac{t_n}{t_{n-1}}-1\right)t_n^2C_0n^B\|\pi_{n-1}f_\lambda\|_{0,1}^2\\
&\leq \sum_{n\geq 0}t_n^2\|\pi_nf_\lambda\|_{0,1}^2=\delta\|Tf_\lambda\|_{0,1}^2.
\end{aligned}$$

Il reste à estimer $< Tf_\lambda, TV >_\pi$. Par l'inégalité 3.2 et comme $2ab \leq A^{-1}a^2 + Ab^2$ pour tout $A > 0$, alors

$$\begin{aligned}
< Tf_\lambda, TV >_\pi &= \sum_n t_n^2 < \pi_nf_\lambda, \pi_nV >_\pi\\
&\leq \sum_{n\geq 0}t_n^2\|\pi_nf_\lambda\|_{0,1}\|\pi_nV\|_{0,-1}\\
&\leq \delta\sum_{n\geq 0}t_n^2\|\pi_nf_\lambda\|_{0,1}^2+\delta^{-1}\sum_{n\geq 0}t_n^2\|\pi_nV\|_{0,-1}^2\\
&\leq \delta\|Tf_\lambda\|_{0,1}^2+\delta^{-1}\|TV\|_{0,-1}^2.
\end{aligned}$$

Enfin

$$\begin{aligned}
C_0^{-1}\|Tf_\lambda\|_{0,1}^2 &\leq < Tf_\lambda, TV >_\pi + > Tf_\lambda, [L_+,T]f_\lambda >_\pi + < Tf_\lambda, [L_-,T]f_\lambda >_\pi\\
&\leq 3\delta\|Tf_\lambda\|_{0,1}^2+\delta^{-1}\|TV\|_{0,-1}^2.
\end{aligned}$$

Si on choisit $\delta = \frac{1}{4C_0}$ dans ce cas

$$\|Tf_\lambda\|_{0,1}^2 \leq 16C_0^2\|TV\|_{0,-1}^2.$$

Faisant tendre $n_2 \uparrow \infty$. Soit $T'$ l'opérateur associé à la suite $t'_n$, définie par

$$t'_n = n^{2k}\mathbb{1}_{\{n\geq n_1\}} + n_1^{2k}\mathbb{1}_{\{n<n_1\}}.$$

On déduit que

$$\sum_{n\geq 0}n^{2k}\|\pi_nf_\lambda\|_{0,1}^2 \leq \sum_{n\geq 0}(t'_n)^2\|\pi_nf_\lambda\|_{0,1}^2 \leq 16C_0^2\sum_{n\geq 0}(t'_n)^2\|\pi_nV\|_{0,-1}^2$$

$$\leq 16C_0^2n_1^{2k}\sum_{n\geq 0}n^{2k}\|\pi_nV\|_{0,-1}^2$$

donc $C_1 = 16C_0^2n_1^{2k}$ et $\delta = \frac{1}{4C_0}$. □

Supposons que $L_0$ satisfait la condition du secteur sur chaque sous espace $A_n$

$$< g, (-L_0)f >_\pi^2 \leq C_0n^{2\gamma} < f, (-R_0)f >_\pi < g, (-R_0)g >_\pi, \tag{3.16}$$

pour $\gamma > 0$ et tout $g$ dans $D(L) \cap A_n$. On impose aucune condition sur $\gamma$. Par définition de la norme $\|.\|_{0,-1}$

$$\|L_0 f\|_{0,-1} \leq \sqrt{C_0} n^\gamma \|f\|_{0,1},$$

pour toute fonction $f$ dans $D(L) \cap A_n$.

**Lemme 8** *Supposons que le générateur L satisfait 3.13, 3.15 et 3.16. Fixons une fonction V telle que*

$$\sum_{n \geq 0} n^{2k} \|\pi_n V\|_{0,-1}^2 < \infty,$$

*pour $k \geq (b \vee \gamma)$. Soit $f_\lambda$ une solution de l'équation résolvante 3.5. Alors*

$$\sup_{0<\lambda\leq 1} \|L f_\lambda\|_{0,-1} < \infty.$$

Preuve — De l'inégalité 3.14 il s'en suit que

$$\|L f_\lambda\|_{-1}^2 \leq C_0 \|L f_\lambda\|_{0,-1}^2 = C_0 \sum_{n\geq 0} \|\pi_n L f_\lambda\|_{0,-1}^2.$$

Fixons $n \geq 0$. Comme

$$\pi_n L f_\lambda = L_- \pi_{n+1} f_\lambda + L_0 \pi_n f_\lambda + L_+ \pi_{n-1} f_\lambda.$$

Par 3.16 et 3.15 on a

$$\begin{aligned} \|\pi_n L f_\lambda\|_{0,-1} &\leq \|L_- \pi_{n+1} f_\lambda\|_{0,-1} + \|L_0 \pi_n f_\lambda\|_{0,-1} + \|l_+ \pi_{n-1} f_\lambda\|_{0,-1} \\ &\leq C_0 n^B \|\pi_{n+1} f_\lambda\|_{0,1} + C_0 n^\gamma \|\pi_n f_\lambda\|_{0,1} C_0 n^B \|\pi_{n-1} f_\lambda\|_{0,1}, \end{aligned}$$

d'où

$$\|L f_\lambda\|_{-1}^2 \leq 3 C_0^3 \left( \sum_{n\geq 0} n^{2B} \|\pi_{n+1} f_\lambda\|_{0,1}^2 + {}_{n\geq 0} n^{2\gamma} \|\pi_n f_\lambda\|_{0,1}^2 + \sum_{n\geq 0} n^{2B} \|\pi_{n-1} f_\lambda\|_{0,1}^2 \right).$$

D'après le lemme précédent et comme $k \geq (B \vee \gamma)$

$$\|L f_\lambda\|_{-1}^2 \leq C_{1 n\geq 0} n^{2k} \|\pi_n f_\lambda\|_{0,1}^2 \leq C_2 \sum_{n\geq 0} n^{2k} \|\pi_n V\|_{0,-1}^2,$$

pour une constante finie $C_2$ dépendant seulement de $C_0, B$ et $\gamma$.

$\square$

Ainsi pour montrer le théorème centrale limite pour une fonctionnelle additive d'un processus de Markov, il suffit de montrer que le générateur vérifie la condition du secteur gradué i.e. 3.13, 3.15 et 3.16.

# Chapitre 4

# Particule marquée

## 4.1 Introduction

Le but de ce chapitre est de montrer le théorème centrale limite pour la position d'une particule marquée dans un processus d'exclusion simple avec la méthode présentée dans le chapitre précédent.

Parmi les modèles de systèmes de particules, les plus étudiés et les plus simples sont les processuses d'exclusion simple. Il représente l'évolution d'une marche aléatoire sur $Z^d$.

Fixons une mesure de probabilité $P(.)$ sur $Z^d$, les particules sont réparties sur $Z^d$ de façon à n'avoir au plus qu'une particule par site.

Les particules évoluent sur $Z^d$ comme une marche aléatoire avec une probabilité de transition invariante en translation

$$P(x, y) = P(0, y - x) = P(y - x).$$

À chaque instant la particule essaye de sauter. Le saut et soit accordé ou soit supprimé afin de respecter les règles de l'exclusion simple.

La description précédente correspond au processus de Markov sur $\mathcal{X}_d = \{0,1\}^{Z^d}$ dont le générateur est donné par

$$(Lf)(\eta) = \sum_{x,z \in Z^d} \eta(x)(1 - \eta(x+z))P(z) \left[ f(\eta^{x,x+z}) - f(\eta) \right], \tag{4.1}$$

$\eta$ représente une configuration de $\mathcal{X}_d$. Pour $x \in Z^d$, $\eta(x) = 1$ si le site est occupé et $\eta(x) = 0$ s'il ne l'est pas et $f$ une fonction cylindrique i.e. elle ne dépend que d'un nombre fini de coordonnées. La configuration $\eta^{x,y}$ est obtenue en interchangeant les variables d'occupation $\eta(x)$, $\eta(y)$,

$$\eta^{x,y}(z) = \begin{cases} \eta(z) & si \quad z \neq x, y \\ \eta(y) & si \quad z = x \\ \eta(x) & si \quad z = y. \end{cases}$$

Le processus d'exclusion simple est dit symétrique si la probabilité de transition est symétrique i.e.

$$P(z) = P(-z).$$

Il est dit de moyenne nulle si la probabilité de transition n'est pas symetrique mais vérifie

$$\sum_z zP(z) = 0.$$

Tous les autres cas sont dits asymétriques. Afin d'éviter les cas dégénérés on suppose que la probabilité de transition $P$ est irréductible dans le sens où $\{x, P(\pm x) > 0\}$ engendre $Z^d$, i.e.pour toute paire de site $x, y$ dans $Z^d$ il existe $M \geq 1$ et une séquence $x_0 = x, \ldots, x_M = y$ tel que

$$P(x_{i+1} - x_i) + P(x_i - x_{i-1}) > 0,$$

pour tout $i : 0 \leq i \leq M - 1$. On supposera aussi que la mesure de transition est à portée finie i.e.,

$$\exists A_0 \in \mathbb{N},\ P(z) = 0,\ \forall z \notin [-A_0, A_0]^d. \tag{4.2}$$

Notons que le nombre de particules est conservé par cette dynamique. Cette conservation entraîne l'existence d'une famille à un paramètre de mesures invariantes.

Pour $0 \leq \alpha \leq 1$, notons par $\nu_\alpha$ la mesure produit de Bernoulli de paramètre $\alpha$. Cela signifie que les variables $\{\eta(x), x \in Z^d\}$ sont indépendantes pour $\nu_\alpha$ leurs marginales sont données par

$$\nu_\alpha\{\eta(x) = 1\} = \alpha = 1 - \nu_\alpha\{\eta(x) = 0\}.$$

Un simple calcul montre que les mesures produit de Bernoulli $\{\nu_\alpha, 0 \leq \alpha \leq 1\}$ sont invariantes pour le processus de l'exclusion simple. En effet par la proposition 1, il suffit de vérifier que $\int Lf d\nu_\alpha = 0$ pour toute fonction cylindrique.

Par l'hypothèse 4.2 on peut fixer un ensemble fini de site $A \subseteq Z^d$, tel que

$$Lf(\eta) = \sum_{x,y \in A} P(x,y)\eta(x)(1 - \eta(y)) \left[f(\eta^{x,y}) - f(\eta)\right].$$

Alors

$$\int Lf(\eta)d\nu_\alpha = \sum_{x,y \in A} P(x,y)\eta(x)(1 - \eta(y))f(\eta^{x,y})\nu_\alpha(d\eta)$$

$$- \sum_{x,y \in A} P(x,y)\eta(x)(1 - \eta(y))f(\eta)\nu_\alpha(d\eta).$$

Introduisons la notation $\eta = (\eta', \eta(x), \eta(y))$ où $\eta'$ représente toutes les coordonnées à l'extérieure de $\{x, y\}$.

Soit $\nu'_\alpha$ la distribution marginale de $\eta'$ et $\nu^x_\alpha$ la distribution marginale de $\eta(x)$. Comme $\nu_\alpha$ est une mesure produit, on peut intégrer séparément sur les coordonnées distinctes, d'où

$$\begin{aligned}&\int \nu_\alpha(d\eta)\eta(x)(1-\eta(y))f(\eta^{x,y})\\ &= \int \nu'_\alpha(d\eta')\int \nu^x_\alpha(d\eta(x))\int \nu^y_\alpha(d\eta(y))\eta(x)(1-\eta(y))f(\eta',\eta(y),\eta(x)\\ &= \int \nu'_\alpha(d\eta')\alpha(1-\alpha)f(\eta',0,1)\\ &= \int \nu_\alpha(d\eta)\eta(y)(1-\eta(x))f(\eta).\end{aligned}$$

Alors $\displaystyle\int Lf d\nu_\alpha(\eta) = \int \nu'_\alpha d(\eta')\alpha(\alpha-1)f(\eta',0,1)\left(\sum_{x,y}P(x,y)-\sum_{x,y}P(y,x)\right) = 0$, car $P$ est doublement stochastique. Notons par $L^*$ le générateur défini par

$$(L^*f)(\eta) = \sum_{x,z\in Z^d}\eta(x+z)(1-\eta(x))P^*(z)\left[f(\eta^{x+z,x})-f(\eta)\right],$$

associé à la probabilité de transition $P^*(x) = P(-x)$. $L^*$ est l'opérateur adjoint de $L$ dans $L^2(\nu_\alpha)$. En particulier le processus d'exclusion simple symétrique est auto-adjoint par rapport à $\nu_\alpha$ $(0 \le \alpha \le 1)$.

Pour $t \ge 0$, notons par $\eta_t$ l'état du processus de Markov dont le générateur est donné par 4.1 à l'instant $t$.

Parmi toutes les particules marquons une et notons par $X_t$ sa position à l'instant $t$. Le processus $X_t$ lui même n'est pas Markovien car son évolution dépend de la position des autres particules. Par contre $(\eta_t, X_t)$ est un processus de Markov sur $\mathcal{X}_d \times Z^d$.

Notons par $\{\tau_x, x \in Z^d\}$ le groupe de translation sur $\mathcal{X}_d$. Pour $x, y$ dans $Z^d$ et une configuration $\eta$ dans $\mathcal{X}_d$,

$$(\tau_x\eta)(y) = \eta(x+y).$$

L'action du groupe de translation s'étend naturellement sur les fonctions et les mesures.

Notons par $\xi_t$ l'état du processus à l'instant $t$ vu de la particule marquée

$$\xi_t = \tau_{X_t}\eta_t.$$

Pour le processus $\xi_t$ l'origine est toujours occupée, puisque

$$\xi_t(0) = (\tau_{X_t}\eta_t)(0) = \eta_t(X_t) = 1.$$

On peut considérer $\xi$ comme une configuration de $\mathcal{X}_d$ où l'origine est toujours occupée ou comme une configuration de $\mathcal{X}^*_d = \{0,1\}^{Z^d_*}$, où $Z^d_* = Z^d - \{0\}$. On utilisera la deuxième convention.

En vertu de la théorie classique des semi-groupes de Feller, le processus $\xi_t(x) = \eta_t(x + X_t)$, représentant le système vu de la particule marquée est un processus de Markov sur $\mathcal{X}^*_d$ de générateur $\mathcal{L}$ donné par

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{L}f)(\xi) = & \sum_{x,y\in Z^d_*} P(y-x)\xi(x)(1-\xi(y))\left[f(\xi^{x,y})-f(\xi)\right] \\
+ & \sum_{z\in Z^d_*} P(z)(1-\xi(z))\left[f(\theta_z\xi)-f(\xi)\right].
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

La première partie du générateur prend en compte les sauts de l'environnement, pendant que la deuxième partie correspond aux sauts de la particule marquée. Dans la formule précédente $\theta_y\xi$ sont les configurations où la particule marquée qui est à l'origine est transférée au site $z$ et la totalité du système est translaté de $-z$. Pour tout $y$ dans $Z^d_*$

$$
(\theta_z\xi)(y) = \begin{cases} \xi(z) & si \quad y=-z \\ \\ \xi(y+z) & si \quad y\neq -z. \end{cases}
$$

Pour $0\leq \alpha \leq 1$, notons par $\nu^*_\alpha$ les mesures produit de Bernoulli sur $\mathcal{X}^*_d$ par $\mathcal{L}^*$ le générateur définie par 4.3 dont la probabilité de transition $P^*(y)=P(-y)$ et par $<,>_\mu$ le produit scalaire sur $L^2(\mu)$ pour une mesure de probabilité $\mu$.

De la même manière que pour les $\nu_\alpha$ on montre que $\{\nu^*_\alpha, 0\leq\alpha\leq 1\}$ sont invariantes pour le processus markovien $\xi_t$ de générateur infinétisimal $\mathcal{L}$ dont l'adjoint est $\mathcal{L}^*$ dans $L^2(\nu^*_\alpha)$.

On avait vu le rôle que jouait $\mathcal{H}_1$ pour établir le théorème centrale limite pour une fonctionnelle additive. Pour le processus d'exclusion simple vu de la particule marquée dont le générateur est $\mathcal{L}$ on a

$$
\begin{aligned}
< f,(-\mathcal{L})f >_{\nu^*_\alpha} &= \tfrac{1}{2} < f, -(\mathcal{L}+\mathcal{L}^*)f >_{\nu^*_\alpha} \\
&= \tfrac{1}{2}\sum_{x,y\in Z^d_*} P(y-x)\int d\nu^*_\alpha \xi(x)(1-\xi(y))\left[f(\eta^{x,y})-f(\eta)\right]^2 \\
&+ \tfrac{1}{2}\sum_{z\in Z^d_*} P(z)\int d\nu^*_\alpha(1-\xi(z))\left[f(\theta_z\xi)-f(\xi)\right]^2.
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

L'une des questions concernant le comportement asymptotique de la particule marquée est la loi des grands nombres. Pour $0<\alpha<1$, notons par $\mathbb{P}_{\nu^*_\alpha}$ la mesure sur l'espace $D(\mathbb{R},\mathcal{X}^*_d)$ associée au processus de Markov de générateur $\mathcal{L}$ et de mesure initiale $\nu^*_\alpha$.

Dans le résultat suivant Saada [7] a montré la loi des grands nombres pour la position d'une particule marquée.

**Théorème 5** *Pour tout* $0\leq\alpha\leq 1$

$$
\lim_{t\longrightarrow} \frac{X_t}{t} = (1-\alpha)\gamma,
$$

*en* $\mathbb{P}_{\nu^*_\alpha}$ *probabilité, où* $\gamma = \sum_{z\in Z^d_*} zP(z)$.

Afin d'établir le théorème centrale limite, notons par $Z_t$ le processus avec un changement d'échelle de la position de la particule marquée

$$Z_t = \frac{X_t - t\gamma(1-\alpha)}{\sqrt{t}}.$$

Pour tout $z$ tel que $P(z) > 0$ et pour $s < t$, notons par $N^z_{[s,t]}$ le nombre total de sauts de la particule sur l'intervalle de temps $[s,t]$ de longueur $z$. Soit $N^z_t = N^z_{[0,t]}$. Soient

$$M^z_t = N^z_t - \int_0^t P(z)(1-\xi_s(z))ds,$$
$$\widetilde{M}^z_t = (M^z_t)^2 - \int_0^t P(z)(1-\xi_s(z))ds.$$

On remarque que $M^z_t$ et $\widetilde{M}^z_t$ sont des martingales qui s'annulent en zéro. En effet il suffit de remarquer que $M^z_t$ peut encore s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} M^z_t &= N^z_t - \int_0^t P(z)\mathbb{1}_{\{\xi_s(z)=0\}}\, ds \\ &= N^z_t - \int_0^t \mathbb{1}_{\{\tau_{X_s}\eta_s(z)=0\}}\, ds \end{aligned}$$

et comme $\tau_{X_t}\eta_t$ est un processus de Markov $M^z_t$ est donc une martingale. Il en est de même pour $\widetilde{M}^z_t$.

Pour $y, z$ dans $Z^d_*$ tels que $P(z-y) > 0$ et $s < t$, notons $N^{y,z}_{[s,t]}$ le nombre de sauts de la particule dans l'intervalle de temps $[s,t]$ entre $y$ et $z$. Soit $N^{y,z}_t = N^{y,z}_{[0,t]}$. Soient

$$M^{y,z}_t = N^{y,z}_t - \int_0^t P(y-z)\xi_s(y)(1-\xi_s(z))ds,$$
$$\widetilde{M}^{y,z}_t = (M^{y,z}_t)^2 - \int_0^t P(y-z)\xi_s(y)(1-\xi_s(z))ds.$$

De la même manière $M^{y,z}_t$ peut encore s'écrire sous la forme

$$M^{y,z}_t = N^{y,z}_t - \int_0^t P(y-z)\mathbb{1}_{\{\tau_{X_s}\eta_s(y)=1, \tau_{X_s}\eta_s(z)=0\}}ds.$$

Du fait que $\tau_{X_t}\eta_t$ soit un processus de Markov $M^{y,z}_t$ et $\widetilde{M}^{y,z}_t$ sont aussi des martingales.

Afin d'obtenir la position de la particule marquée, on a juste besoin de sommer le nombre de sauts multiplier par la longueur du saut

$$\begin{aligned} X_t &= \sum_{z\in Z^d} zN^z_t \\ &= \sum_{z\in Z^d} zM^z_t + \sum_{z\in Z^d}\int_0^t zP(z)(1-\xi_s(z))ds. \end{aligned}$$

En particulier pour tout vecteur $a$ dans $\mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned}(a.Z_t) &= \left(a.\tfrac{X_t}{\sqrt{t}} - \tfrac{1}{\sqrt{t}}\int_0^t \sum_{z\in Z_*^d} zP(z)(1-\alpha)ds\right)\\ &= \left(a.\tfrac{1}{\sqrt{t}}\sum_{z\in Z_*^d} zM_t^z + \frac{1}{\sqrt{t}}\int_0^t \sum_{z\in Z_*^d} zP(z)(\alpha-\xi_s(z))ds\right)\\ &= \tfrac{1}{\sqrt{t}}\sum_{z\in Z_*^d}(a.z)M_t^z + \frac{1}{\sqrt{t}}\int_0^t \sum_{z\in Z_*^d}(a.z)P(z)(\alpha-\xi_s(z))\\ &= \tfrac{M_t^a}{\sqrt{t}} + \tfrac{1}{\sqrt{t}}\int_0^t V_a(\xi_s)ds,\end{aligned}$$

Où $M_t^a$ est une martingale réelle définie par

$$M_t^a = \sum_{z\in Z_*^d}(a.z)M_t^z$$

et $V_a$ est une fonction de moyenne nulle définie par

$$V_a(\xi) = \sum_{z\in Z_*^d}(a.z)P(z)(\alpha-\xi(z)). \tag{4.5}$$

Dans les formules précédentes $(a.b)$ est le produit scalaire dans $\mathbb{R}^d$. Pour prouver le théorème centrale limite pour le processus $Z_t$, on a besoin de représenter $\int_0^t V_a(\xi_s)ds$ comme la somme d'une martingale $\widetilde{M}_t$ plus un terme qui s'annule à la limite et puis de calculer la variance limite de $M_t^a + \widetilde{M}_t$. Par le théorème 4 une telle représentation est possible si les solutions de l'équation résolvante

$$\lambda f_\lambda - \mathcal{L}f_\lambda = V_a$$

vérifient la condition 3.6. Dans ce cas $\widetilde{M}_t$ est la limite lorsque $\lambda \downarrow 0$ de la martingale $M_t^\lambda$ définie par

$$M_t^\lambda = f_\lambda(\xi_t) - f_\lambda(\xi_0) - \int_0^t \mathcal{L}f_\lambda(\xi_s)ds.$$

Toujours par le théorème 4 si la condition 3.6 sur la solution de l'équation résolvante est satisfaite,

$$(a.Z_t) = \frac{1}{\sqrt{t}}M_t^a + \frac{1}{\sqrt{t}}M_t^\lambda + R_t^\lambda$$

et $\lim_{t\longrightarrow+\infty}\lim_{\lambda\longrightarrow 0} R_t^\lambda = 0$ dans $L^2(\nu_\alpha^*)$. Comme $\nu_\alpha^*$ est invariante, la martingale $M_t^a + \widetilde{M}_t$ satisfait les conditions du lemme 3 pour tout $a$ dans $\mathbb{R}^d$, sous la condition 3.6, $Z_t$ converge en loi vers une variable aléatoire gaussienne centrée de co-variance $D(\alpha)$ qu'on calculera.

Comme

$$\begin{aligned}
f_\lambda(\xi_t) - f_\lambda(\xi_0) &= \sum_{x,y\in Z_*^d} \int_0^t \left[f_\lambda(\xi_{s_-}^{x,y}) - f_\lambda(\xi_{s_-})\right] dN_s^{x,y} \\
&+ \sum_{z\in Z_*^d} \int_0^t \left[f_\lambda(\theta_z\xi_{s_-}) - f_\lambda(\xi_{s_-})\right] dN_s^{z},
\end{aligned}$$

$M_t^\lambda$ peut s'écrire en fonction des martingales $M_t^z$ et $M_t^{x,y}$,

$$\begin{aligned}
M_t^\lambda &= f_\lambda(\xi_t) - f_\lambda(\xi_0) - \sum_{x,y\in Z_*^d} P(y-x) \int_0^t \xi(x)[1-\xi(y)][f_\lambda(\xi^{x,y}) - f_\lambda(\xi)]ds \\
&- \sum_{z\in Z_*^d} P(z) \int_0^t [1-\xi(z)][f_\lambda(\theta_z\xi) - f_\lambda)\xi)]ds \\
&= \sum_{x,y\in Z_*^d} \int_0^t \left[f_\lambda(\xi_{s_-}^{x,y}) - f_\lambda(\xi_{s_-})\right] dM_s^{x,y} + \sum_{z\in Z_*^d} \int_0^t \left[f_\lambda(\theta_z\xi_{s_-}) - f_\lambda(\xi_{s_-})\right] dM_s^{z}.
\end{aligned}$$

On peut maintenant donner une formule explicite de $D(\alpha)$.

$$\begin{aligned}
(a.D(\alpha)a) &= \mathbb{E}_{\nu_\alpha^*}[(M_1^a + \widetilde{M}_1)^2] = \lim_{\lambda\longrightarrow 0} \mathbb{E}_{\nu_\alpha^*}[(M_1^a + \widetilde{M}_1^\lambda)^2] \\
&= \lim_{\lambda\longrightarrow 0} \left\{ \mathbb{E}_{\nu_\alpha^*}\left[\left(\sum_{x,y\in Z_*^d} \int_0^1 f_\lambda(\xi_{s_-}^{x,y}) - f_\lambda(\xi_{s_-})\ dM_s^{x,y}\right)^2\right]\right. \\
&+ \left.\mathbb{E}_{\nu_\alpha^*}\left[\left(\sum_{z\in Z_*^d} \int_0^1 \left\{(a.z) + [f_\lambda(\theta_z\xi_{s_-}) - f_\lambda(\xi_{s_-})]\right\} dM_s^z\right)^2\right]\right\}
\end{aligned}$$

Du fait que les martingales $M_t^z$ et $M_t^{x,y}$ sont orthogonaux $D(\alpha)$ est encore donnée par

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\nu_\alpha^*}[(M_1^a + \widetilde{M}_1)^2] &= \lim_{\lambda\longrightarrow 0} \left\{ \sum_{x,y\in Z_*^d} P(y-x)\mathbb{E}_{\nu_\alpha^*}\left[\xi(x)(1-\xi(y))[f_\lambda(\xi^{x,y}) - f_\lambda(\xi)]^2\right]\right. \\
&+ \left.\sum_{z\in Z_*^d} P(z)\mathbb{E}_{\nu_\alpha^*}\left[(1-\xi(z))\left\{(a.z) + [f_\lambda(\theta_z\xi) - f_\lambda(\xi)]\right\}^2\right]\right\}.
\end{aligned}$$

En développant le carré dans la dernière espérance, on obtient pour tout $\lambda$ fixé,

$$\begin{aligned}
(1-\alpha) & \sum_{z\in Z_*^d} P(z)(a.z)^2 + 2\sum_{z\in Z_*^d}(a.z)P(z)\mathbb{E}_{\nu_\alpha^*}\left[(1-\xi(z))[f_\lambda(\theta_z\xi) - f_\lambda(\xi)]\right] \\
+ & \sum_{x,y\in Z_*^d} P(y-x)\mathbb{E}_{\nu_\alpha^*}\left[\xi(x)(1-\xi(y))[f_\lambda(\xi^{x,y}) - f_\lambda(\xi)]^2\right] \\
+ & \sum_{z\in Z_*^d} \mathbb{E}_{\nu_\alpha^*}\left[(1-\xi(z))[f_\lambda(\theta_z\xi) - f_\lambda(\xi)]^2\right].
\end{aligned}$$

En vertu de 4.4 la somme des deux derniers termes est égale à $2\|f_\lambda\|_1^2$. Le changement de variable $\zeta = \theta_z\xi$ dans la formule $\mathbb{E}_{\nu_\alpha^*}[(1-\xi(z))f_\lambda(\theta_z)]$ nous permet d'écrire

$$\mathbb{E}_{\nu_\alpha^*}[(1-\xi(z))f_\lambda(\theta_z)] = \mathbb{E}_{\nu_\alpha^*}[(1-\xi(-z))f_\lambda(\xi)]$$

et

$$\begin{aligned} & 2 \sum_{z\in Z_*^d}(a.z)P(z)\mathbb{E}_{\nu_\alpha^*}\left[(1-\xi(z))[f_\lambda(\theta_z\xi)-f_\lambda(\xi)]\right] \\ = \; & 2\sum_{z\in Z_*^d}(a.z)P(z)\mathbb{E}_{\nu_\alpha^*}[(1-\xi(-z))f_\lambda(\xi)] \\ = \; & 2 < W_a, f >_{\nu_\alpha^*}, \end{aligned}$$

où

$$W_a = \sum_{z\in Z_*^d}(a.z)P(z)[(\xi(z)-\xi(-z))].$$

En conclusion

$$(a.D(\alpha)a) = (1-\alpha)\sum_{z\in Z_*^d}P(z)(a.z)^2 + \lim_{\lambda\longrightarrow 0}\left\{2 < W_a, f_\lambda >_{\nu_\alpha^*} + 2\|f_\lambda\|_1^2\right\},$$

pour tout $a$ dans $\mathbb{R}^d$. On avait déjà montré que $\lim_{\lambda\longrightarrow 0}\|f_\lambda\|_1^2 = \lim_{\lambda\longrightarrow 0} < V_a, f_\lambda >_{\nu_\alpha^*}$, d'autre part

$$V_a + W_a = \sum_{z\in Z_*^d}(a.z)P(z)[\alpha - \xi(-z)].$$

Alors

$$(a.D(\alpha)a) = (1-\alpha)\sum_{z\in Z_*^d}P(z)(a.z)^2 + 2\sum_{\lambda\longrightarrow 0} < \widetilde{W}_a, f_\lambda >_{\nu_\alpha^*}, \tag{4.6}$$

où $\widetilde{W}_a = \sum_{z\in Z_*^d}(a.z)P(z)[\alpha - \xi(-z)]$.

Dans cette première partie de ce chapitre on a montré le théorème centrale limite pour une particule marquée dans un processus d'exclusion simple sous la condition 3.6 sur les solutions de l'équation résolvante. Dans ce cas la variance limite est donnée par 4.6. Dans ce qui va suivre on montrera la condition 3.6 dans différents contextes.

## 4.2 Cas Symétrique

Supposons que $P$ est symétrique. Dans ce cas le générateur $\mathcal{L}$ est auto-adjoint. Afin d'appliquer la méthode présenter au chapitre deux, on a besoin de vérifier que $V_a$ est dans l'espace de Sobolev $\mathcal{H}_{-1}$ associé au générateur $\mathcal{L}$.

Fixons une fonction $f$ dans $L^2(\nu^*_\alpha)$. Comme $V_a$ est de moyenne nulle et si $< f >_{\nu^*_\alpha}$ est l'espérance de $f$ par rapport à $\nu^*_\alpha$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\nu^*_\alpha}[V_a f] &= \sum_{z\in Z^d_*}(a.z)P(z)\int(\alpha-\xi(z))[f-<f>_{\nu^*_\alpha}]d\nu^*_\alpha \\
\mathbb{E}_{\nu^*_\alpha}[V_a f] &= \sum_{z\in Z^d_*}(a.z)P(z)\int(1-\xi(z))[f-<f>_{\nu^*_\alpha}]d\nu^*_\alpha,
\end{aligned}$$

car $P$ est symétrique et pour tout $a$ dans $\mathbb{R}^d$ la somme $\alpha\sum_z(a.z)P(z) < f >_{\nu^*_\alpha}= 0$. Par le changement de variable $\zeta=\theta_z\xi$ la dernière expression peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned}
&\sum_{z\in Z^d_*}(a.z)P(z)\int(1-\xi(z))[f-<f>_{\nu^*_\alpha}]\ d\nu^*_\alpha = \\
&\tfrac{1}{2}\sum_{z\in Z^d_*}(a.z)P(z)\int(1-\xi(z))[f-<f>_{\nu^*_\alpha}]\ d\nu^*_\alpha \\
&+\tfrac{1}{2}\sum_{z\in Z^d_*}(a.z)P(z)\int(1-\xi(-z))[f(\theta_{-z}\xi)-<f>_{\nu^*_\alpha}]\ d\nu^*_\alpha,
\end{aligned}$$

car pour tout $y\neq z$, $\xi(y)=\theta_{-z}\zeta(y)$ et $\xi(z)=\zeta(-z)$. Par le changement de variable $z'=-z$ dans la dernière expression et comme $P$ est symétrique la somme des deux derniers termes est égale à :

$$\mathbb{E}_{\nu^*_\alpha}[V_a f]=\frac{1}{2}\sum_{z\in Z^d_*}(a.z)P(z)\int(1-\xi(z))[f(\xi)-f(\theta_z\xi)]d\nu^*_\alpha.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Scwartz,

$$\begin{aligned}
(\mathbb{E}_{\nu^*_\alpha}[V_a f])^2 &\leq \tfrac{1}{4}\sum_{z\in Z^d_*}(a.z)^2P(z)\sum_z P(z)\left[\int(1-\xi(z))[f(\xi)-f(\theta_z\xi)]d\nu^*_\alpha\right]^2 \\
&\leq \tfrac{1}{4}(1-\alpha)\sum_{z\in Z^d_*}(a.z)^2P(z)\sum_z P(z)\int(1-\xi(z))[f(\xi)-f(\theta_z\xi)]^2d\nu^*_\alpha.
\end{aligned}$$

D'après la formule 4.4

$$\{<V_a,f>_{\nu^*_\alpha}\}^2\leq\frac{1}{2}(1-\alpha)\sum_{z\in Z^*_d}(a.z)^2P(z)<f,(-\mathcal{L}l)f>_{\nu^*_\alpha},$$

d'où

$$\|V_a\|^2_{-1}\leq\frac{1}{2}(1-\alpha)\sum_{z\in Z^d_*}(a.z)^2P(z),$$

comme $P$ est à portée finie, $V_a$ est donc dans $\mathcal{H}_{-1}$ et la condition 3.6 se trouve réalisée dans ce cas. C'est cette condition qui assure le théorème centrale limite pour une particule marquée dans un processus d'exclusion simple. Ce résultat a été montré initialement dans le cas réversible par Kipnis et Varadhan [9].

**Théorème 6** *Supposons que la probabilité de transition $P(.)$ est symétrique. Alors $Z_t$ converge en distribution lorsque $t \uparrow +\infty$ vers une gaussienne centrée de co-variance $D(\alpha)$ donnée par 4.6.*

## 4.3 Le cas de la moyenne nulle

Supposons que $\sum_z zP(z) = 0$ et que $P$ n'est pas nécessairement symétrique. Dans ce cas Varadhan a montré la condition du secteur pour ce modèl, i.e. l'existence d'une constante $C_0$ telle que

$$\{< f, (-\mathcal{L})g >_{\nu_\alpha^*}\}^2 \leq C_0 < f, (-\mathcal{L})f >_{\nu_\alpha^*} < g, (-\mathcal{L})g >_{\nu_\alpha^*},$$

Pour toutes les fonctions dans le domaine du générateur $\mathcal{L}$. Varadhan a aussi montré que $V_a$ est dans $\mathcal{H}_{-1}$. On a déjà vu à la section 3.3.2 que si la condition du secteur est vérifier et que $V_a$ est dans $\mathcal{H}_{-1}$ alors la condition 3.6 est satisfaite et le théoème centrale limite est prouvé pour la fonctionnelle additive $V_a$. Ce résultat à été montré par Varadhan.

**Théorème 7** *Supposons que $P$ est de moyenne nulle mais pas nécessairement symétrique. Alors $Z_t$ converge en distribution lorsque $t \uparrow \infty$ vers une gaussienne centrée de matrice de co-variance $D(\alpha)$ donnée par 4.6.*

## 4.4 Processus d'exclusion asymétrique

Supposons maintenant que $P$ est asymétrique. Pour tout $n \geq 0$ notons par $\mathcal{E}_{*,n}$ le sous-ensemble de $Z_*^d$ de $n$ points et soit $\mathcal{E}_* = \cup_{n\geq 0}\mathcal{E}_{*,n}$ la classe des sous-ensembles finis de $Z_*^d$. Pour $A$ dans $\mathcal{E}_*$, soit $\Psi_A$ la fonction locale,

$$\Psi_A = \Pi_{x\in A}\frac{\xi(x) - \alpha}{\sqrt{\mathcal{X}(\alpha)}},$$

où $\mathcal{X}(\alpha) = \alpha(\alpha - 1)$. La famille $\{\Psi_A, A \in \mathcal{E}_*\}$ est une base orthonormée de $L^2(\nu_\alpha^*)$. Pour tout $n \geq 1$ notons par $\mathcal{G}_n$ le sous espace de $L^2(\nu_\alpha^*)$ engendré par $\{\Psi_A, A \in \mathcal{E}_{*,n}\}$ telle que

$$L^2(\nu_\alpha^*) = \oplus_{n\geq 0}\mathcal{G}_n.$$

Les fonctions dans $\mathcal{G}_n$ sont dites de degré $n$. Considérons une fonction locale $f$. Comme $\{\Psi_A, A \in \mathcal{E}_{*,n}\}$ est une base de $L^2(\nu_\alpha^*)$, la fonction locale $f$ peut s'écrire

$$f = \sum_{A\in\mathcal{E}_*} f(A)\Psi_A = \sum_{n\geq 0}\sum_{A\in\xi-*,n} f(A)\Psi_A = \sum_{n\geq 0}\pi_n f.$$

L'application $\pi_n$ est la projection orthogonale sur $\mathcal{G}_n$. Notons que $f(a)$ ne dépend pas seulement de $f$ mais de la densité $\alpha$ aussi, $f(A) = f(A, \alpha)$. Comme $f$ est une fonction locale $f : \mathcal{E}_* \longrightarrow \mathbb{R}$, elle est donc à support fini. Pour un sous-ensemble $A$ de $Z^d$ et $x, y$ dans $Z^d$, notons par $A_{x,y}$ et $S_y A$ les ensembles définis par

$$A_{x,y} = \begin{cases} (A\backslash\{x\}) \cup \{y\} & \text{if} \quad x \in A, y \notin A \\ (A\backslash\{y\}) \cup \{x\} & \text{if} \quad y \in A, x \notin A \\ A & \end{cases}$$

$$S_y A = \begin{cases} A - y & \text{if} \quad y \notin A \\ (A - y)_{0,-y} & \text{if} \quad y \in A \end{cases}$$

Dans cette formule $B + z$ est l'ensemble $\{x + z, x \in B\}$. Pour obtenir $S_y A$ à partir de $A$, dans le cas où $y$ est dans $A$, on translate $A$ de $-y$ (on obtient un nouveau ensemble qui contient l'origine ) ensuite on enleve l'origine et on ajoute le point $-y$. Notons par $s(.)$ et $a(.)$ le partie symétrique et asymétrique respectivement de la probabilité de transition $P$,

$$s(x) = \frac{1}{2}(P(x) + P(-x)), \quad a(x) = \frac{1}{2}(P(x) - P(-x)).$$

Notons par

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_0^1 f)(A) &= \tfrac{1}{2} \sum_{x,y \in Z_*^d} s(y - x)[f(A_{x,y}) - f(A)], \\ (\mathcal{L}_0^2 f)(A) &= \sum_{x \in A, y \notin A} a(y - x)[f(A_{x,y}) - f(A)], \\ (\mathcal{L}_0^- f)(A) &= \sum_{x \notin A, y \notin A} a(y - x) f(A \cup \{x\}), \\ (\mathcal{L}_0^+ f)(A) &= \sum_{x \in A, y \in A} a(y - x) f(A - \{y\}), \end{aligned} \tag{4.7}$$

et par

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_\tau^1 f)(A) &= \sum_{y \in A} P(y)[f(S_y A) - f(A)], \\ (\mathcal{L}_\tau^2 f)(A) &= \sum_{y \notin A} P(y)[f(S_y A) - f(A)], \\ (\mathcal{L}_\tau^+ f)(A) &= \sum_{y \in A} P(y)[f(A - \{y\}) - f(S_y A - \{-y\})], \\ (\mathcal{L}_\tau^- f)(A) &= \sum_{y \notin A} P(y)[f(A \cup \{y\}) - f(S_y A \cup \{-y\})]. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Soit $\mathcal{L}_{0,\alpha}$ un opérateur qui peut être décomposer comme

$$\mathcal{L}_{0,\alpha} = \mathcal{L}_0^1 + (1 - 2\alpha)\mathcal{L}_0^2 + +\sqrt{\mathcal{X}(\alpha)}(\mathcal{L}_0^+ - \mathcal{L}_0^-).$$

En général $\mathcal{L}_{0,\alpha}$ n'est pas un générateur markovien. Dans le cas particulier où $P$ est symértrique les trois derniers opérateurs sont nuls et $\mathcal{L}_{0,\alpha}$ restreint à $\mathcal{E}_{*,n}$ est un générateur d'un processus markovien où $n$ particules se déplacent sur $Z^d$ selon une marche aléatoire symétrique réspectant les règles de l'exclusion simple. Notons par $\mathcal{L}_{\tau,\alpha}$ un opérateur qui peut être décomposer comme

$$\mathcal{L}_{\tau,\alpha} = \alpha\mathcal{L}_\tau^1 + (1-\alpha)\mathcal{L}_\tau^2 + \sqrt{\mathcal{X}(\alpha)}(\mathcal{L}_\tau^+ + \mathcal{L}_\tau^-).$$

Le générateur $\mathcal{L}$ peut s'écrire en fonction de $\mathcal{L}_{0,\alpha}$ et $\mathcal{L}_{\tau,\alpha}$ comme suit

$$(\mathcal{L}f) = \sum_{A\in\mathcal{E}_*}\{(\mathcal{L}_{0,\alpha}f)(A) + (\mathcal{L}_{\tau,\alpha}f)(A)\}\Psi_A.$$

En effet comme la famille $\{\Psi_A, A\in\xi_*\}$ forme une base, il suffit de calculer $\mathcal{L}\Psi_A$,

$$(\mathcal{L}\Psi_A)(\xi) = \sum_{x,y\in Z_*^d} P(y-x)\xi(x)(1-\xi(y))\left[\Psi_A(\xi^{x,y}) - \Psi_A(\xi)\right]$$
$$+\sum_{z\in Z_*^d} P(z)(1-\xi(z))\left[\Psi_A(\theta_z\xi) - \Psi_A(\xi)\right].$$

Notons par $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ la première partie et la deuxième partie du générateur $\mathcal{L}$. On commenece par remarquer que

$$(\mathcal{L}_1\Psi_A)(\xi) = \sum_{x,y\in Z_*^d} P(y-x)\xi(x)\left[\Psi_A(\xi^{x,y}) - \Psi_A(\xi)\right],$$

car sur l'ensemble $\xi(x)\xi(y)$ on a $\xi^{x,y} = \xi$. De plus le terme $\psi_A(\xi^{x,y}) - \psi_A(\xi)$ est nul sauf dans les cas où $x\notin A$ ou $x\notin A, y\in A$. Dans ces deux derniers cas $\Psi_A(\xi^{x,y}) = \Psi_{A_{x,y}}(\xi)$, on remarque aussi que

$$\begin{aligned}
\Psi_A(\theta_z A) &= \Psi_{S_{-z}A}(\eta) \\
\eta(z)\Psi_A &= \begin{cases} (1-\alpha)\Psi_A + \sqrt{\mathcal{X}(\alpha)}\Psi_{A\setminus\{z\}} & \text{si} \quad z\in A \\ \alpha\Psi_A + \sqrt{\mathcal{X}(\alpha)}\Psi_{B\cup\{z\}} & \text{si} \quad z\notin A. \end{cases}
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_1\Psi_A(\xi) &= 2\sqrt{\mathcal{X}(\alpha)}\sum_{x\in A, y\notin A} a(y-x)\Psi_{A\cup\{y\}} - 2\sqrt{\mathcal{X}(\alpha)}\sum_{x\in A,y\notin A} a(y-x)\Psi_{A\setminus\{x\}} \\
&+ \sum_{x\in A,y\notin A} s(y-x)(\Psi_{A_{x,y}} - \Psi_A) + (2\alpha-1) + \sum_{x\in A,y\notin A} a(y-x)(\Psi_{A_{x,y}} + \Psi_A).
\end{aligned}$$

Par un changement de variables on trouve que $\mathcal{L}_1\Psi_A = \mathcal{L}_{0,\alpha}$, de la même manière on obtient que $\mathcal{L}\Psi_A = \mathcal{L}_{\tau,\alpha}\Psi_A$. On peut alors décomposer le générateur $\mathcal{L}$ sous la forme

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_- + \mathcal{R}_0 + \mathcal{B}_0 + \mathcal{L}_+,$$

où

$$(\mathcal{L}_- f) = \sqrt{\mathcal{X}(\alpha)} \sum_{A \in \mathcal{E}_*} \{-2\mathcal{L}_0^- + \mathcal{L}_\tau^-\} f(A)\Psi_A,$$
$$(\mathcal{L}_+ f) = \sqrt{\mathcal{X}(\alpha)} \sum_{A \in \mathcal{E}_*} \{2\mathcal{L}_0^+ + \mathcal{L}_\tau^+\} f(A)\Psi_A,$$
$$(\mathcal{B}_0 f) = \sum_{A \in \mathcal{E}_*} \{(1-2\alpha)\mathcal{L}_0^2 + \alpha\mathcal{L}_\tau^1\} f(A)\Psi_A,$$
$$(\mathcal{R}_0 f) = \sum_{A \in \mathcal{E}_*} \mathcal{L}_0^1 f(A)\Psi_A.$$

L'espace $L^2(\nu_\alpha^*)$ et le générateur $\mathcal{L}$ ont la même structure présentée à la section 3.3.3. Notons par $\mathcal{H}_{0,1}$, $\mathcal{H}_{0,-1}$ les espaces de Sobolev associés aux fonctions locales et à l'opérateur $\mathcal{R}_0$ qui est symétrique est positif.

Afin d'établir le théorème centrale limite pour la particule marquée, on besoin de montrer que la fonction $V_a$ donnée par 4.5 satisfait les conditions du lemme 8 et que le gńérateur vérfie les hypothèses du secteur gradué 3.13, 3.15 et 3.16.

Sethurrman, Varadhan et Yau [8] ont montré qu'en dimension $d \geq 3$ toutes les fonctions locales de moyennes nulles sont dans $\mathcal{H}_{-1}$. En particulier comme $V_a$ est de moyenne nuule,

$$\| < V_a, f >_{\nu_\alpha^*} \leq C_0 \|f\|_1,$$

pour une constante $C_0$ et toutes les fonctions $f$ dans le domaine du générateur. Dans [8] il a éte montré par le lemme 4.4 que

$$\|f\|_1 \leq C_0 \|f\|_{0,1},$$

pour une constante $C_0$, d'où $V_a$ est dans $\mathcal{H}_{0,-1}$ et la premiére condition est satisfaite. Pour les conditions du secteur gradué 3.13, 3.15 et 3.15 elles ont étaient montrées dans [2], [3], [4] et [8]. On a donc le résultat suivant

**Théorème 8** *Supposons que la probabilité de transition $P(.)$ est asymétrique. Alors pour la dimension $d \geq 3$, le processus $Z_t$ converge en distribution lorsque $t \uparrow \infty$ vers une gaussienne de matrice de co-variance $D(\alpha)$ donnée par 4.6.*

# Bibliographie


[1] Arratia R. ; The motion of a tagged particle in the simple symmetric exclusion system in $Z$, Ann. Prob. **11**, 362-373 (1983).

[2] Landim C., Olla S., Varadhan S.R.S. ; Finite-dimensional approximation of the self-diffusion coefficient for the exclusion process. The Annals of Probability **30**, 483-508, (2002).

[3] Landim C., Olla S., Varadhan S.R.S. ; Symmetric simple exclusion process : regularity of the self-diffusion coefficient. Communications in Mathematical Physics **224**, 307–321, (2001).

[4] Landim C., Olla S., Varadhan S.R.S. ; On viscosity and fluctuation-dissipation in exclusion processes. To appear in J. Stat. Phys.

[5] Liggett T. M. ;*Interacting Particule Systems*, Spriger-Verlag, New york (1985)

[6] Olla S. ; *Homogenization of Diffusion Processes in Random Fields.* Ecole Polytechnique, France (1994).

[7] Saada E. ; A limit theorem for the position of a tagged particle in a simple exclusion process. Ann. Probab. **15**,375-381, (1987).

[8] Sethuraman S., Varadhan S.R.S., Yau H. T. ; Diffusive limit of tagged particle in asymetrique exclusion process. preprint.

[9] Kipnis C., Varadhan S. R. S. ; Central limit theorem for additive functionals of reversible Markov process and application to simple exclusion. Commun. Math. Phys. **106** 1-19 (1986).

[10] Varadhan S. R. S. ; Self-diffusion of tagged particle in equilibrium for asymmetric mean zero rondom walks with simple exclusion, Ann. Inst. H. Poincaré (Probabilités), **31**, 237-285.