

# Résolution en temps court d'une équation de Hamilton-Jacobi non locale décrivant la dynamique d'une dislocation

## Small-time solvability of a non-local Hamilton-Jacobi equation describing dislocation dynamics

Olivier Alvarez<sup>a</sup>, Philippe Hoch<sup>b</sup>, Yann Le Bouar<sup>c</sup>, Régis Monneau<sup>d</sup>

<sup>a</sup>Lab. Math. R. Salem, Site Colbert, Université de Rouen, 76821 Mont-Saint-Aignan Cedex

<sup>b</sup>CEA/DAM Ile de France, Service DCSA/SSEL, BP 12, 91680 Bruyères Le Chatel

<sup>c</sup>Lab. d'Etude des Microstructures, CNRS-ONERA, 29, av. de la division Leclerc, BP 72, 92322, Châtillon

<sup>d</sup>CERMICS, ENPC, 6 et 8 avenue Blaise Pascal, Cité Descartes, Champs-sur-Marne, 77455 Marne-la-Vallée Cedex 2

---

### Abstract

The note studies a nonlocal geometric Hamilton-Jacobi equation that models the motion of a planar dislocation in a crystal. Within the framework of viscosity solutions and of the level-set approach, we show that the equation has a unique solution on a small time interval when the initial curve is the graph of a Lipschitz bounded function. *To cite this article: O. Alvarez, P. Hoch, Y. Le Bouar, R. Monneau C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I ??? (2004).*

### Résumé

La note étudie une équation de Hamilton-Jacobi géométrique non locale qui modélise le mouvement d'une dislocation plane dans un cristal. Dans le cadre de la théorie des solutions de viscosité et de l'approche par ensemble de niveau, on montre que l'équation admet une unique solution sur un petit intervalle de temps lorsque la courbe initiale est le graphe d'une fonction lipschitzienne bornée. *Pour citer cet article : O. Alvarez, P. Hoch, Y. Le Bouar, R. Monneau C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I ??? (2004).*

---

### Abridged English version

Plastic deformation of crystals is mainly due to the movement of linear defects called dislocations. The mobility of these defects is very sensitive to the crystallographic structure of the crystal. In the face centered cubic structure (observed in many metals and alloys), dislocations move at low temperature in well defined crystallographic planes (the slip planes) and the normal velocity of the dislocation curve in the slip plane only depends on the elastic field it generates within the crystal. The equation of motion

---

*Email addresses:* [Olivier.Alvarez@univ-rouen.fr](mailto:Olivier.Alvarez@univ-rouen.fr) (Olivier Alvarez), [Philippe.Hoch@cea.fr](mailto:Philippe.Hoch@cea.fr) (Philippe Hoch), [Yann.LeBouar@onera.fr](mailto:Yann.LeBouar@onera.fr) (Yann Le Bouar), [monneau@cermics.enpc.fr](mailto:monneau@cermics.enpc.fr) (Régis Monneau).

therefore consists in the coupling of an evolutionary eikonal equation with the stationary equation that gives the elastic field. One can solve the linear elasticity equation and, when there is a single dislocation, write the system as a non local Hamilton-Jacobi equation

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = (c_0 \star \rho^+(t, \cdot) + c_1) |\nabla \rho|, \quad (1)$$

in the slip plane, where the convolution is with respect to the space variable. The function  $c_0$  is a kernel associated with the equation of elasticity and the function  $c_1$  corresponds to an external shear field applied to the material. The unknown is the ‘‘characteristic’’ function  $\rho(t, \cdot)$  of the front at time  $t$  that takes the value 0 on the dislocation line and the values  $-1$  or  $+1$  outside the curve according to its orientation.

The note establishes the existence and uniqueness of a solution to (1) in a small time interval when the initial front is the graph of a Lipschitz bounded function. It relies on the theory of viscosity solutions and on the level-set method. Given a function  $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$ , we define the quantities

$$\|f\|_{L^1_{\text{unif}}(\mathbb{R}^2)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^2} \int_{Q_1(x)} |f| dy, \quad \|f\|_{L^\infty_{\text{int}}(\mathbb{R}^2)} = \int_{\mathbb{R}^2} \|f\|_{L^\infty(Q_1(x))} dx,$$

where  $Q_1(x)$  designates the square  $\{y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid |y_1 - x_1| \leq 1/2, |y_2 - x_2| \leq 1/2\}$ . We denote respectively  $L^1_{\text{unif}}(\mathbb{R}^2)$  and  $L^\infty_{\text{int}}(\mathbb{R}^2)$  the space of the functions for which these quantities are finite.

**Theorem** *Consider two functions  $c_0 \in L^\infty_{\text{int}}(\mathbb{R}^2) \cap W^{1,1}(\mathbb{R}^2)$  and  $c_1 \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)$ . Given a function  $f_0 \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ , put*

$$\rho_{f_0}(x_1, x_2) = 1 \quad \text{if } x_2 < f_0(x_1), \quad = 0 \quad \text{if } x_2 = f_0(x_1), \quad = -1 \quad \text{if } x_2 > f_0(x_1).$$

*Then, there is a time  $T^* > 0$  (depending on the bounds of  $c_0$ ,  $c_1$  and  $f_0$ ) for which the following holds. (Existence) There is a bounded discontinuous viscosity solution  $\rho \in C^0([0, T^*]; L^1_{\text{unif}}(\mathbb{R}^2))$  of*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = (c_0 \star \rho^+(t, \cdot) + c_1) |\nabla \rho| \quad \text{in } (0, T^*) \times \mathbb{R}^2, \quad \rho(0, \cdot) = \rho_{f_0} \quad \text{on } \mathbb{R}^2. \quad (4)$$

*(Uniqueness) If  $\rho_1, \rho_2 \in C^0([0, T^*]; L^1_{\text{unif}}(\mathbb{R}^2))$  are two bounded discontinuous viscosity solutions of (4), they have the same semi-continuous envelopes and, for every  $t \in [0, T^*)$ ,  $\rho_1(t, \cdot) = \rho_2(t, \cdot)$  a.e. in  $\mathbb{R}^2$ .*

We can make the following comments. One can easily check that, whenever  $\rho \in C^0([0, T^*]; L^1_{\text{unif}}(\mathbb{R}^2))$ , the speed  $c_\rho(t, x_1, x_2) = (c_0 \star \rho^+(t, \cdot) + c_1)(x_1, x_2)$  is continuous with respect to all the variables. It therefore makes sense to consider discontinuous viscosity solutions of the Hamilton-Jacobi equation (4) where the speed  $c_\rho$  is considered as a data. The uniqueness assertion, though a bit technical, is natural when dealing with discontinuous viscosity solutions. It allows to define with no ambiguity the generalized front

$$\Gamma_t = \{\rho^*(t, \cdot) \geq 0\} \cap \{\rho_*(t, \cdot) \leq 0\}$$

as the set actually depends only on the semicontinuous envelopes of  $\rho$ . We actually show that the front is the graph of a function  $f$ , i.e.  $\Gamma_t = \{x_2 = f(t, x_1)\}$ , which is the unique bounded Lipschitz continuous viscosity solution of the Hamilton-Jacobi equation

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, x_1) = \left( c_0 \star \rho^+_{f(t, \cdot)} + c_1 \right) (x_1, f(t, x_1)) \sqrt{1 + \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(t, x_1) \right)^2}$$

with initial condition  $f_0$ .

A sketch of the proof of the theorem is given in the full note. We refer to the paper [1] for the detailed proofs, for a thorough discussion of the physical model and for numerical simulations. As concerns this last point, let us mention two features of the equation (1): the Hamiltonian, being either convex or concave in the gradient, can be approximated by a monotone discretized Hamiltonian; the nonlocality, arising from convolution, will be efficiently approximated by the fast Fourier transform.

## 1. Motivation physique

La déformation plastique des cristaux résulte principalement du déplacement de défauts linéaires appelés dislocations, dont l'ordre de longueur typique dans les métaux est  $10^{-6}m$  et l'épaisseur  $10^{-9}m$ . La mobilité de ces défauts dépend fortement de la structure cristallographique du cristal. Dans la structure cubique à faces centrées (observée dans de nombreux métaux et alliages) les dislocations se meuvent à basse température dans des plans cristallographiques bien définis. Une idéalisation consiste à considérer des lignes d'épaisseur nulle contenues dans un plan  $(x_1, x_2)$ . Le mouvement de ces lignes est alors déterminé par leur vitesse normale, vitesse dont l'amplitude dépend de la force de Peach-Koehler résolue calculée à partir du champ élastique. (On renvoie aux ouvrages [7] et [8] pour une présentation détaillée de la théorie des dislocations.) Il s'agit donc de la propagation de fronts décrits par une équation eikonale, couplée aux équations de l'élasticité. En utilisant la fonction de Green associée au problème élastique, il est possible d'éliminer le champ élastique (voir [9]). Ainsi, dans le cas où on ne considère qu'une dislocation, l'équation se réduit à l'équation d'Hamilton-Jacobi non locale suivante :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = (c_0 \star \rho^+(t, \cdot)) |\nabla \rho|$$

où  $c_0$  est un noyau calculable à partir des équations de l'élasticité dont l'intégrale est nulle et où la convolution a lieu en espace. Ici  $\rho$  est une fonction discontinue à valeurs dans  $\{-1, 0, 1\}$ , dont la discontinuité est portée par la ligne de dislocation, et  $\rho^+ = \max(\rho, 0)$ . Lorsque l'on rajoute un champ de cisaillement dans le matériau représenté par une fonction  $c_1$ , l'équation devient :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = (c_0 \star \rho^+(t, \cdot) + c_1) |\nabla \rho|. \quad (1)$$

## 2. Résultat principal

L'objectif de cette note est d'établir l'existence et l'unicité d'une solution de l'équation de Hamilton-Jacobi (1) en temps petit. Bien qu'étant une première étape, ce résultat assure que le modèle d'évolution d'une ligne de dislocation est mathématiquement bien posé et permettra d'étudier la convergence de schémas numériques convenables. Néanmoins, comme nous avons en vue la résolution de l'équation en temps long, nous nous plaçons dans le cadre adapté à la résolution globale des équations de Hamilton-Jacobi, à savoir la théorie des solutions de viscosité, introduite par Crandall, Lions [5]. (On renvoie aux livres de Barles [3] et de Bardi, Capuzzo-Dolcetta [2] pour une présentation de la théorie des équations du premier ordre.) Pour l'étude du problème géométrique de l'évolution d'un front dont la vitesse normale est prescrite, on utilise l'approche par ensemble de niveau qui permet de se ramener à la résolution d'une équation de Hamilton-Jacobi dans tout l'espace; l'inconnue est alors une fonction à valeurs dans  $\{-1, 0, 1\}$  qui prend la valeur 0 sur le front et les valeurs -1 ou 1 selon que l'on se trouve à l'intérieur ou à l'extérieur de celui-ci. (On renvoie à l'article de Barles, Soner, Souganidis [4] et à sa bibliographie pour une présentation détaillée de la théorie des équations géométriques.)

La note n'est qu'une présentation du résultat principal et de sa démonstration. On renvoie à l'article complet [1] pour des démonstrations détaillées, pour une discussion approfondie du modèle physique et pour des simulations numériques. En ce qui concerne ce dernier point, signalons deux caractéristiques de l'équation (1) : le hamiltonien  $c_\rho(t, x)|p|$  est soit convexe soit concave en  $p$ , selon le signe de  $c_\rho(t, x)$ , ce qui permet de l'approcher facilement par un hamiltonien discrétisé monotone; d'autre part, la non-localité résultant de la convolution, elle pourra être traitée efficacement par des méthodes de type transformée de Fourier rapide.

Notons  $x = (x_1, x_2)$  un point de  $\mathbb{R}^2$ . Etant donnée une fonction  $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$ , on considère les quantités

$$\|f\|_{L^1_{\text{unif}}(\mathbb{R}^2)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^2} \int_{Q_1(x)} |f| dy, \quad \|f\|_{L^\infty_{\text{int}}(\mathbb{R}^2)} = \int_{\mathbb{R}^2} \|f\|_{L^\infty(Q_1(x))} dx,$$

$Q_1(x)$  désignant le carré  $\{y \in \mathbb{R}^2 \mid |y_1 - x_1| \leq 1/2, |y_2 - x_2| \leq 1/2\}$ . On note respectivement  $L^1_{\text{unif}}(\mathbb{R}^2)$  et  $L^\infty_{\text{int}}(\mathbb{R}^2)$  l'espace des fonctions pour lesquelles ces quantités sont finies. Un calcul simple montre que si  $f \in L^1_{\text{unif}}(\mathbb{R}^2)$  et si  $g \in L^\infty_{\text{int}}(\mathbb{R}^2)$ , alors le produit de convolution  $f \star g$  est borné et vérifie

$$\|f \star g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq \|f\|_{L^1_{\text{unif}}} \|g\|_{L^\infty_{\text{int}}}. \quad (2)$$

Pour  $T > 0$  fixé, donnons brièvement la définition de solution de viscosité discontinue pour l'équation de Hamilton-Jacobi

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = c(t, x) |\nabla \rho| \quad \text{dans } (0, T) \times \mathbb{R}^2, \quad \rho(0, x) = \rho_0(x) \quad \text{sur } \mathbb{R}^2. \quad (3)$$

On suppose que la condition initiale  $\rho_0$  est bornée et que la vitesse  $c(t, x)$  est continue sur  $[0, T) \times \mathbb{R}^2$ . On rappelle qu'étant donnée une fonction localement bornée  $h$  définie sur  $[0, T) \times \mathbb{R}^2$ , la fonction  $h^*$  désigne son enveloppe semi-continue supérieure (c'est-à-dire la plus petite fonction s.c.s.  $\geq h$ ) et la fonction  $h_*$ , son enveloppe semi-continue inférieure.

**Définition** Une fonction bornée  $\rho$  définie sur  $[0, T) \times \mathbb{R}^2$  est une solution de viscosité discontinue de l'équation de Hamilton-Jacobi (3) si elle vérifie les propriétés suivantes.

i) (Sous-solution) Condition initiale :  $\rho^*(0, \cdot) \leq \rho_0^*$

Equation : Pour tout point  $(t_0, x_0) \in (0, T) \times \mathbb{R}^2$  et pour toute fonction test  $\phi \in C^1([0, T) \times \mathbb{R}^2)$  tangente supérieurement à  $\rho^*$  en  $(t_0, x_0)$  (i.e. vérifiant  $\rho^* \leq \phi$  dans  $[0, T) \times \mathbb{R}^2$  et  $\rho^*(t_0, x_0) = \phi(t_0, x_0)$ ), on a  $\frac{\partial \phi}{\partial t}(t_0, x_0) \leq c(t_0, x_0) |\nabla \phi(t_0, x_0)|$ .

ii) (Sur-solution) Condition initiale :  $\rho_*(0, \cdot) \geq (\rho_0)_*$

Equation : Pour tout point  $(t_0, x_0) \in (0, T) \times \mathbb{R}^2$  et pour toute fonction test  $\phi \in C^1([0, T) \times \mathbb{R}^2)$  tangente inférieurement à  $\rho_*$  en  $(t_0, x_0)$ , on a  $\frac{\partial \phi}{\partial t}(t_0, x_0) \geq c(t_0, x_0) |\nabla \phi(t_0, x_0)|$ .

Nous avons alors le résultat suivant d'existence et d'unicité de solutions en temps court pour l'équation (1) modélisant la dynamique d'une ligne de dislocation. Pour simplifier la présentation, on se place dans le cadre particulier où la dislocation initiale est le graphe d'une fonction lipschitzienne bornée  $f_0$ . Notons que ceci n'est pas vraiment une restriction tant que l'on regarde le problème en temps petit et que l'on s'intéresse à des fronts initiaux réguliers puisque ceux-ci sont localement le graphe d'une fonction et que l'équation de Hamilton-Jacobi est localisée en raison de la vitesse de propagation finie des caractéristiques (abstraction faite de la convolution).

**Théorème** Soient deux fonctions  $c_0 \in L^\infty_{\text{int}}(\mathbb{R}^2) \cap W^{1,1}(\mathbb{R}^2)$  et  $c_1 \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)$ . Etant donnée une fonction  $f_0 \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ , on définit la fonction discontinue

$$\rho_{f_0}(x_1, x_2) = 1 \quad \text{si } x_2 < f_0(x_1), \quad = 0 \quad \text{si } x_2 = f_0(x_1), \quad = -1 \quad \text{si } x_2 > f_0(x_1).$$

Alors, il existe un temps  $T^* > 0$  (qui ne dépend que de bornes sur  $c_0, c_1$  et  $f_0$ ) pour lequel on a les propriétés suivantes.

(Existence) Il existe une solution de viscosité discontinue bornée  $\rho \in C^0([0, T^*]; L^1_{\text{unif}}(\mathbb{R}^2))$  de

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = (c_0 \star \rho^+(t, \cdot) + c_1) |\nabla \rho| \quad \text{dans } (0, T^*) \times \mathbb{R}^2, \quad \rho(0, \cdot) = \rho_{f_0} \quad \text{sur } \mathbb{R}^2. \quad (4)$$

(Unicité) Si  $\rho_1, \rho_2 \in C^0([0, T^*]; L^1_{\text{unif}}(\mathbb{R}^2))$  sont deux solutions de viscosité discontinues bornées de (4), alors

$$\rho_1^* = \rho_2^*, \quad (\rho_1)_* = (\rho_2)_* \quad \text{dans } [0, T^*) \times \mathbb{R}^2$$

et, pour tout  $t \in [0, T^*)$ , on a  $\rho_1(t, \cdot) = \rho_2(t, \cdot)$  p.p. dans  $\mathbb{R}^2$ .

Plusieurs commentaires sont de rigueur. On peut vérifier facilement que les inégalités de convolution (dont (2)) et le fait que la fonction bornée  $\rho$  soit dans  $C^0([0, T^*]; L^1_{\text{unif}}(\mathbb{R}^2))$  impliquent que la vitesse

$$c_\rho(t, x_1, x_2) = (c_0 \star \rho^+(t, \cdot) + c_1)(x_1, x_2)$$

est continue par rapport à toutes les variables (elle est lipschitzienne en espace et uniformément continue en temps sur tout pavé  $[0, T] \times \mathbb{R}^2$  pour  $T < T^*$ ). Par solution de l'équation (4), nous entendons une fonction  $\rho$  qui est une solution de viscosité discontinue de l'équation (3) pour la vitesse  $c = c_\rho$ . Ceci a bien un sens puisque la vitesse est continue.

La formulation du résultat d'unicité est un peu technique car on s'intéresse aux solutions de viscosité discontinues. Notons que l'on autorise deux solutions à différer ponctuellement (il est élémentaire de construire de tels exemples). Mais cela est sans conséquence pour l'équation de Hamilton-Jacobi (4) parce que deux solutions définiront la même vitesse  $c_\rho$  (elles sont égales p.p. en espace pour tout temps) et que la notion de solution de viscosité ne voit que les enveloppes semicontinues (et celles-ci sont égales).

Le résultat d'unicité permet en particulier de définir sans ambiguïté le flot généralisé  $\Gamma_t$  par

$$\Gamma_t = \{\rho^*(t, \cdot) \geq 0\} \cap \{\rho_*(t, \cdot) \leq 0\}$$

pour  $0 \leq t < T^*$ , puisque cet ensemble ne dépend en fait que des enveloppes semicontinues de  $\rho$ . Au cours de la démonstration du théorème principal, on établit en fait que le flot est le graphe d'une fonction  $f$ , i.e.  $\Gamma_t = \{x_2 = f(t, x_1)\}$ , où  $f$  est l'unique solution lipschitzienne bornée de l'équation de Hamilton-Jacobi

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, x_1) = (c_0 \star \rho_{f(t, \cdot)}^+ + c_1)(x_1, f(t, x_1)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(t, x_1)\right)^2} \quad (5)$$

avec pour condition initiale  $f_0$ .

### 3. Éléments de démonstration

La difficulté essentielle consiste à montrer que l'équation du graphe (5) admet une unique solution lipschitzienne sur un petit intervalle de temps. Pour ce faire, on applique un théorème de point fixe pour une application contractante bien choisie. On renvoie à [6] pour une étude approfondie de l'équation du graphe pour les équations de Hamilton-Jacobi ne dépendant pas de  $f$ ; dans ce cas, la solution est globale en temps. Notons que la difficulté ici vient de ce que le hamiltonien n'est pas lipschitzien en  $f$  uniformément en  $\partial f / \partial x_1$ . La conséquence est que l'équation du graphe n'admet de solution qu'en temps petit.

Etant donnée une fonction bornée lipschitzienne  $g$ , on note  $h = \Phi(g)$  l'unique solution de viscosité de l'équation de Hamilton-Jacobi

$$\frac{\partial h}{\partial t}(t, x_1) = (c_0 \star \rho_{g(t, \cdot)}^+ + c_1)(x_1, g(t, x_1)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x_1}(t, x_1)\right)^2}$$

avec  $f_0$  pour condition initiale. On peut montrer alors que la fonction  $h$  est bornée et lipschitzienne et contrôler précisément sa norme  $W^{1, \infty}$  en fonction de celle de  $g$ . Plus précisément, posons

$$K_1 = \|c_0\|_{L^1} + \|c_1\|_{L^\infty}, \quad K_2 = \|\nabla c_0\|_{L^1} + \|\nabla c_1\|_{L^\infty}, \quad L_0 = \|f_0\|_{L^\infty}, \quad M_0 = \left\| \frac{\partial f_0}{\partial x_1} \right\|_{L^\infty}.$$

Notons  $L_g(t) = \|g(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$ ,  $M_g(t) = \left\| \frac{\partial g}{\partial x_1}(t, \cdot) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$  et  $P_g(t) = \left\| \frac{\partial g}{\partial t}(t, \cdot) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$ . On peut alors montrer à l'aide du principe du maximum que  $L_h(t) \leq L_0 + K_1 t$  et que  $M_h$  est solution de l'inéquation différentielle  $\dot{M}_h \leq K_2(1 + M_g)(1 + M_h)$  avec  $M_h(0) = M_0$ . Notons  $T^* = K_2^{-1}(1 + M_0)^{-1}$  le temps d'explosion de la solution de l'équation différentielle  $\dot{N} = K_2(1 + N)^2$  avec  $N(0) = M_0$ . On déduit en intégrant l'estimation précédente que, si  $M_g(t) \leq N(t)$  pour tout  $t \in [0, T^*)$ , alors  $M_h$  satisfait à la même inégalité. En reportant cette estimation dans l'équation, on obtient que  $P_h(t) \leq K_1(1 + N(t))$ .

Revenant à  $\Phi$ , cela signifie que la fonction applique l'espace

$$E = \{g \in C([0, T^*) \times \mathbb{R}) \mid \|g(t, \cdot)\|_{L^\infty} \leq L(t), \left\| \frac{\partial g}{\partial x_1}(t, \cdot) \right\|_{L^\infty} \leq N(t), \left\| \frac{\partial g}{\partial t}(t, \cdot) \right\|_{L^\infty} \leq P(t) \text{ sur } [0, T^*)\}$$

dans lui-même, avec  $L(t) = L_0 + K_1 t$  et  $P(t) = K_1(1 + N(t))$ . Quitte à remplacer  $T^*$  par un temps  $S > 0$  plus petit, on vérifie que l'application  $\Phi$  est contractante lorsque  $E$  est muni de la distance de la convergence uniforme. Elle admet donc un unique point fixe  $f$ . Par construction,  $f$  est l'unique solution lipschitzienne bornée de (5) sur  $(0, S)$ . Ce résultat d'existence et d'unicité locale établi, on peut prolonger la solution  $f$  jusqu'au temps d'explosion  $T^*$ .

Revenons maintenant à l'équation initiale (1). En adaptant la théorie des solutions de viscosité pour les équations de Hamilton-Jacobi de type géométrique (voir par exemple Barles, Soner, Souganidis [4]), on montre que les équations (1) et (5) sont équivalentes sur  $(0, T^*)$ . Cela signifie que  $\rho_f(t, \cdot) = \rho_{f(t, \cdot)}$  est une solution de viscosité discontinue bornée de (1) appartenant à  $C^0([0, T^*]; L^1_{\text{unif}}(\mathbb{R}^2))$  et que toutes les solutions de viscosité discontinues bornées  $\rho$  de (1) appartenant à  $C^0([0, T^*]; L^1_{\text{unif}}(\mathbb{R}^2))$  ont les mêmes enveloppes semi-continues que  $\rho_f$  et vérifient  $\rho(t, \cdot) = \rho_f(t, \cdot)$  p.p. dans  $\mathbb{R}^2$  pour tout  $t$ . C'est exactement ce que dit le résultat principal et les commentaires qui le suivent. Notons que le résultat d'unicité des solutions discontinues pour l'équation géométrique (1) découle essentiellement de l'observation suivante. Le front généralisé (qui est unique par définition) est un graphe jusqu'à l'instant  $T^*$  puisque l'équation du graphe admet une solution. Par conséquent, il est d'intérieur vide. Pour l'équation de Hamilton-Jacobi associée, cette propriété signifie que l'équation géométrique admet une unique solution de viscosité discontinue (voir [4] pour l'interprétation géométrique de l'unicité des solutions discontinues et [1] pour la démonstration précise de cette assertion).

## Références

- [1] O. Alvarez, P. Hoch, Y. Le Bouar et R. Monneau. En préparation.
- [2] M. Bardi et I. Capuzzo-Dolcetta. *Optimal Control and Viscosity Solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman Equations*. Birkhäuser, Boston, 1997.
- [3] G. Barles. *Solutions de Viscosité des Equations de Hamilton-Jacobi*. Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [4] G. Barles, H. M. Soner et P. E. Souganidis. Front propagation and phase field theory. *SIAM J. Control Optim.*, 31 :439–469, 1993.
- [5] M. G. Crandall et P.-L. Lions. Conditions d'unicité pour les solutions généralisées des équations de Hamilton-Jacobi du premier ordre. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 292 :183–186, 1981.
- [6] Y. Giga, M. Sato A level set approach to semicontinuous viscosity solutions for Cauchy problems. *Commun. Partial Differ. Equations*, 26 :813–839, 2001.
- [7] J.R. Hirth et L. Lothe. *Theory of dislocations*. McGraw-Hill, New York, 1982.
- [8] R.W. Lardner. *Mathematical theory of dislocations and fracture*. Mathematical Expositions 17, University of Toronto Press, 1974.
- [9] D. Rodney, Y. Le Bouar et A. Finel. Phase field methods and dislocations. *Acta Materialia*, 51 :17–30, 2003.