BROUX Marjorie
RAMIALISON Sariaka

Maîtrise de Mathématiques

# THÉORIE ET PRATIQUE DES ORDINAUX

Sujet proposé et dirigé par T. de la Rue

UNIVERSITE DE ROUEN

2002-2003

## Table des matières

Dans toutes les langues, les nombres ont deux formes grammaticales, l'une qui sert à compter, les adjectifs numéraux cardinaux,

français : un, deux, trois, quatre,...
anglais : one, two, three, four,...
allemand : eins, zwei, drei, vier,...
malgache : iray, roa, telo, efatra,...

et l'autre, dite ordinale, qui sert à ranger, à ordonner, les adjectifs numéraux ordinaux,

français : premier, deuxième, troisième, quatrième,...
anglais : first, second, third, fourth,...
allemand : erste, zweiter, dritter, vierter,...
malgache : voalohany, faharoa, fahatelo, fahefatra,...

Au cours de ses recherches en analyse mathématique, Cantor a été amené à étendre ces concepts aux ensembles infinis en créant les ordinaux et les cardinaux transfinis.

# I. Définition des nombres ordinaux

## 1. Relations d'ordre sur un ensemble

**Définition 1.** *Une relation binaire $\mathfrak{R}$ sur un ensemble $E$ est une relation d'ordre si*

- $\mathfrak{R}$ *est réflexive :* $\forall x \in E, x\mathfrak{R}x$
- $\mathfrak{R}$ *est transitive :* $\forall x, y, z \in E, x\mathfrak{R}y$ *et* $y\mathfrak{R}z \Longrightarrow x\mathfrak{R}z$
- $\mathfrak{R}$ *est antisymétrique :* $\forall x, y \in E, x\mathfrak{R}y$ *et* $y\mathfrak{R}x \Longrightarrow x = y$

On dit alors que $E$ est ordonné par $\mathfrak{R}$.

**Exemple 2.**

- $\mathbb{N}, \leqslant$,
- $E, \subset$,
- $E = \mathbb{N}^*$ $\;n\mathfrak{R}n' \Longleftrightarrow n \,\text{divise}\, n'$.

Si $x$ et $y$ sont en relation, on dit qu'ils sont comparables.
Si tous les éléments d'un ensemble $E$ sont comparables, on dit que $E$ est totalement ordonné par $\mathfrak{R}$ (ou que $\mathfrak{R}$ est une relation d'ordre total).

**Définition 3.** *Un ensemble ordonné est appelé bien ordonné (et son ordre est appelé un bon ordre) si chacun de ses sous-ensembles non vide admet un plus petit élément.*

**Exemple 4.**

- L'ensemble vide est considéré comme bien ordonné.
- Tout ensemble fini est bien ordonné.
- L'ensemble des nombres réels, dans leur ordre naturel, de l'intervalle $[0, 1]$ n'est pas bien ordonné : l'ensemble lui-même a certes un premier élément mais le sous-ensemble $]0, 1]$ n'en a pas.
- L'ensemble $\{...,3, 2, 1\}$ n'est pas bien ordonné.
- L'ensemble $\mathbb{Q}$ muni de l'ordre naturel n'est pas bien ordonné, cependant les ensembles (égaux à $\mathbb{Q}$) :

  $$A = \{1, 2, 3, ..., \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}, \tfrac{5}{2}, ..., \tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{4}{3}, ...\}$$
  $$B = \{1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, ..., 2, \tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{5}, ..., 3, \tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{4}, ...\} \text{ sont bien ordonnés.}$$

  L'ordre sur $A$ est défini par : $\frac{p_1}{q_1} \leqslant^{(A)} \frac{p_2}{q_2}$ si $q_1 < q_2$ ou $(q_1 = q_2 \,\text{et}\, p_1 \leqslant p_2)$

  L'ordre sur $B$ est défini par : $\frac{p_1}{q_1} \leqslant^{(B)} \frac{p_2}{q_2}$ si $p_1 < p_2$ ou $(p_1 = p_2 \,\text{et}\, q_1 \leqslant q_2)$.

**Remarque 5.** Un bon ordre est en particulier un ordre total : si l'on considère une paire d'éléments, cette paire doit nécessairement admettre un plus petit élément, c'est à dire que l'un des deux éléments est plus petit que l'autre pour la relation.

**Remarque 6.** Il découle de la définition du bon ordre que tout sous-ensemble d'un ensemble bien ordonné est lui-même bien ordonné.

**Théorème 7.** *ou théorème de bon ordre*
*Tout ensemble $M$ peut être bien ordonné.*

**Démonstration.** Admis (découle de l'axiome du choix). □

## 2. Les nombres ordinaux

On considère des ensembles bien ordonnés.

**Définition 8.** *On dit que deux tels ensembles $(E, \leqslant^{(E)})$ et $(F, \leqslant^{(F)})$ ont même ordinal ou qu'ils sont semblables ou qu'ils ont le même type d'ordre s'il existe une bijection croissante entre $(E, \leqslant^{(E)})$ et $(F, \leqslant^{(F)})$.*

On écrit $E \simeq F$ si $E$ et $F$ sont semblables.

**Exemple 9.**

- Soit $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$
  $2\mathbb{N} = \{0, 2, \ldots\}$
  L'application $\begin{aligned} \boldsymbol{\Theta}: \mathbb{N} &\longrightarrow 2\mathbb{N} \\ n &\longmapsto 2n \end{aligned}$ est bijective et croissante.
  $\mathbb{N}$ et $2\mathbb{N}$ ont même ordinal.
  Remarque : quand on parle de $\mathbb{N}$, on considère l'ordre naturel.
- Reprenons les deux exemples précédents :
  $$A = \{1, 2, 3, \ldots, \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}, \tfrac{5}{2}, \ldots, \tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{4}{3}, \ldots\}$$
  $$B = \{1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \ldots, 2, \tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{5}, \ldots, 3, \tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{4}, \ldots\}$$
  Montrons qu'il existe une bijection croissante entre $A$ et $B$.
  Considérons l'application $\begin{aligned} f: A &\longrightarrow B \\ x &\longmapsto \tfrac{1}{x} \end{aligned}$
  Soit $x, y \in A, x \neq y$ avec $x \leqslant^{(A)} y$.
  On a : $x = \frac{p_1}{q_1}$ avec $p_1, q_1 \in \mathbb{N}^*$ et $p_1 \wedge q_1 = 1$
  $y = \frac{p_2}{q_2}$ avec $p_2, q_2 \in \mathbb{N}^*$ et $p_2 \wedge q_2 = 1$
  On a : $\frac{p_1}{q_1} \leqslant^{(A)} \frac{p_2}{q_2}$
  $*$ si $q_1 = q_2$ : alors $p_1 \leqslant p_2$
  Supposons que $\frac{q_2}{p_2} \leqslant^{(B)} \frac{q_1}{p_1}$ alors $p_2 \leqslant p_1$ : absurde car $x \neq y$.
  $*$ si $q_1 < q_2$ alors $\frac{q_1}{p_1} \leqslant^{(B)} \frac{q_2}{p_2}$
  Donc, $\forall x, y \in A, x \neq y$, on a : $x \leqslant^{(A)} y$ donc $\frac{1}{x} \leqslant^{(B)} \frac{1}{y}$ , et alors $f$ est bijective croissante.
  Par conséquent, les ensembles $A$ et $B$ ont même ordinal.

**Définition 10.** *On appelle nombre ordinal la classe de tous les ensembles bien ordonnés ayant le même type d'ordre.*

On note $\mathrm{ord}(E)$ l'ordinal de $E$.

**Exemple 11.**

- On note $\omega$ l'ordinal de $\mathbb{N}$

- $0 = \text{ord}(\emptyset)$
- Pour tout ensemble $E$ bien ordonné fini, ord$(E)$ est caractérisé par le nombre d'éléments de $E$.

# II. Propriétés des nombres ordinaux

## 1. Comparaison de nombres ordinaux

**Définition 12.** *Un sous-ensemble $F$ d'un ensemble ordonné $E$ est appelé segment de $E$ si :*

$$\forall x \in F, y \leqslant x \Longrightarrow y \in F$$

On voit que pour tout ensemble $E$ bien ordonné, quel que soit le segment $F$ distinct de $E$, $F = \{x \in E: x < y\}$ où $y$ est le premier élément de l'ensemble $E \backslash F$. Réciproquement, tous les ensembles de la forme $\{x \in E: x < y\}$ sont des segments.
En posant :

$$P(y) = \{x : x < y\} \tag{1}$$

on établit une correspondance entre les éléments de $E$ et la famille $\mathfrak{F}$ des segments de l'ensemble $E$ distincts de $E$.
Cette correspondance détermine une application $P$ de $E$ sur $\mathfrak{F}$ (ordonnée par l'inclusion) qui est bijective. En effet :
si $P(a) = P(b)$ alors : $a$ est le plus petit élément de l'ensemble $E \backslash P(a)$
$b$ est le plus petit élément de l'ensemble $E \backslash P(b) = E \backslash P(a)$
donc $a = b$ par unicité du plus petit élément.

**Définition 13.** *Soit $\alpha$ et $\beta$ deux nombres ordinaux, $\alpha$ le type d'ordre de l'ensemble $A$ et $\beta$ celui de l'ensemble $B$.*
*On écrit : $\alpha < \beta$ si l'ensemble $A$ est semblable à un segment de $B$ distinct de $B$ et on dit que $\alpha$ est plus petit que $\beta$.*

Cette définition est indépendante des représentants choisis de chaque classe.

On note $\alpha \leqslant \beta$ si $\alpha = \beta$ ou $\alpha < \beta$.

**Proposition 14.**

*i.* $\alpha \nless \alpha$

*ii.* $\alpha < \beta \Longrightarrow \beta \nless \alpha$

*iii.* $\alpha < \beta$ *et* $\beta < \delta \Longrightarrow \alpha < \delta$

**Démonstration.**

i. Cela revient à montrer qu'un ensemble bien ordonné n'est semblable à aucun de ses segments distincts de lui.
Soit $A$ un ensemble bien ordonné.
Par l'absurde, supposons qu'il existe un segment $B$ de $A$ distinct de $A$ tel que $A$ et $B$ soient semblables.
Alors, d'après (1), $\exists!\ a \in A$ tel que $B = P(a) = \{x : x < a\}$.
$A$ et $B$ étant semblables, $\exists f : A \longrightarrow B$ bijective croissante.
Alors, $f(a) \in B$ et $f(a) < a$.
Donc, l'ensemble $C = \{x : f(x) < x\}$ n'est pas vide.
Soit alors $x_0$ le premier élément de $C$.
On a : $f(x_0) < x_0$.

Comme $f$ est croissante : $f(f(x_0)) < f(x_0)( < x_0)$, donc $x_0$ n'est pas le premier élément de $C$, ce qui contredit l'hypothèse.

ii. Soit $\alpha$ et $\beta$ deux nombres ordinaux, $\alpha$ le type d'ordre d'un ensemble $A$ et $\beta$ le type d'ordre d'un ensemble $B$.
On suppose que l'ensemble $A$ est semblable à un segment $C$ de $B$ distinct de $B$.
Soit alors $f: A \longrightarrow C$ bijective croissante.
Par l'absurde, supposons que $\beta < \alpha$, c'est à dire que $B$ est semblable à un segment $D$ de $A$ distinct de $A$.
Soit alors $g: B \longrightarrow D$ bijective croissante.
On obtient alors $g \circ f: A \longrightarrow D$ bijective croissante.
Donc, $A$ est semblable à l'un de ses segments distincts de lui : absurde d'après $i$.

iii. Soit $A$, $B$ et $C$ trois ensembles bien ordonnés et $\alpha$, $\beta$ et $\delta$ leurs types d'ordre respectifs.
On suppose que $\alpha < \beta$ et $\beta < \delta$.
On suppose que $\alpha < \beta$ c'est à dire que l'ensemble $A$ est semblable à un segment $D$ de $B$ distinct de $B$.
Soit alors $f: A \longrightarrow D$ bijective croissante.
On suppose que $\beta < \delta$ c'est à dire que l'ensemble $B$ est semblable à un segment $E$ de $C$ distinct de $C$.
Soit alors $g: B \longrightarrow E$ bijective croissante.
On obtient alors que $g \circ f: A \longrightarrow E$ est bijective croissante donc
$\alpha < \delta$. □

**Théorème 15.** *Soit $A$ un ensemble bien ordonné et $B$ un sous-ensemble de $A$. Soit $C$ un segment de $B$ distinct de $B$.*
*Alors $A$ et $C$ ne peuvent être semblables.*

**Démonstration.** La démonstration est analogue à celle du $i$ de la proposition précédente. □

**Théorème 16.** $\alpha \neq \beta \Longrightarrow \alpha < \beta$ *ou* $\beta < \alpha$.

**Démonstration.** Soient $A$ et $B$ deux ensembles bien ordonnés de types d'ordre respectifs $\alpha$ et $\beta$.
Désignons par :

- $P_A(a) = \{x : x < a\}$ avec $a \in A$, les segments de $A$ distincts de $A$.
- $P_B(b) = \{y : y < b\}$ avec $b \in B$, les segments de $B$ distincts de $B$.

Considérons l'ensemble : $X = \{x \in A : \exists y \in B : P_A(x) \simeq P_B(y)\}$
Soit $x \in X$.
Supposons qu'il existe $y_1, y_2 \in B$, $y_1 \neq y_2$, tel que $P_A(x) \simeq P_B(y_1)$ et $P_A(x) \simeq P_B(y_2)$.
Alors, $P_B(y_1) \simeq P_B(y_2)$ : absurde d'après i. proposition 14.
Par conséquent, à tout $x \in X$ correspond au plus un $y \in B$ tel que $P_A(x) \simeq P_B(y)$, que l'on notera $f(x)$.
Alors pour tout $x \in X$, on a l'équivalence suivante :

$$P_A(x) \simeq P_B(y) \Longleftrightarrow y = f(x) \tag{2}$$

Montrons que l'ensemble $X$ est un segment de l'ensemble $A$.
Soit $x \in X$, $a \in A$ tel que $a \leqslant x$ et montrons que $a \in X$.
Il existe une application $g$ de l'ensemble $P_A(x)$ sur l'ensemble $P_B(f(x))$ qui soit bijective croissante.
Comme $a \leqslant x$, $P_A(a)$ est un segment de $P_A(x)$.
Alors par $g$, $P_A(a)$ est transformé en un segment de $P_B(f(x))$ donc de $B$.

Donc, $a \in X$ et alors $X$ est un segment de $A$.
De même, $f(X) = \{y \in B : \exists x \in X \text{ tel que } f(x) = y\}$ est un segment de $B$.
De plus, comme on l'a déjà montré, la condition $a < x$ implique que l'ensemble $P_B(f(a))$ est un segment de $P_B(f(x))$ et donc que $f(a) < f(x)$.
Cela veut dire que $X \simeq f(X)$.
Il reste à montrer que $X = A$ ou $f(X) = B$.
Par l'absurde, supposons que $X \neq A$ et $f(X) \neq B$.
Puisque $X$ est un segment de $A$, $\exists!\, a \in A$ tel que $X = P_A(a)$.
De même, $\exists!\, b \in B$ tel que $f(X) = P_B(b)$.
On a alors : $P_A(a) \simeq P_B(b)$ (car $X \simeq f(X)$).
Donc, $a \in X$ c'est à dire que $a \in P_A(a)$ donc $a < a$ : absurde. □

**Théorème 17.** *Si $A$ est un sous-ensemble de l'ensemble bien ordonné $B$, leurs nombres ordinaux respectifs vérifient : $\alpha \leqslant \beta$.*

**Démonstration.** Supposons le contraire, soit $\beta < \alpha$, alors $B$ est semblable à un segment de son sous-ensemble $A$ distinct de $A$, ce qui est impossible d'après le théorème 15. □

**Proposition 18.** *Soit $E$ un ensemble bien ordonné de type d'ordre $\alpha$.*

- $\forall x \in E, \exists \beta < \alpha$ *tel que* $\mathrm{ord}(P(x)) = \beta$
- *Réciproquement,* $\forall \beta < \alpha, \exists x \in E$ *tel que* $\beta = \mathrm{ord}(P(x))$
- $x < y \Longleftrightarrow \mathrm{ord}(P(x)) < \mathrm{ord}(P(y))$

**Démonstration.** Cette proposition est une conséquence de tout ce qui a été fait précédemment. □

## 2. Les types ordinaux

**Définition 19.**

- *Soient $\alpha$ et $\beta$ deux ordinaux. $\alpha$ "précède immédiatement $\beta$" si $\alpha < \beta$ et s'il n'existe aucun ordinal $\gamma$ tel que $\alpha < \gamma < \beta$.*
  *On dit alors que $\alpha$ est le prédécesseur de $\beta$ et $\beta$ le successeur de $\alpha$ et on note $\beta = \alpha + 1$.*
- *Un nombre ordinal $\alpha$ est dit ordinal limite si $\alpha$ n'admet pas de prédécesseur.*
  *On écrit : $\alpha = \lim_{\beta < \alpha} \beta$.*

**Remarque 20.** Les nombres ordinaux limites représentent les ensembles bien ordonnés qui n'ont pas de dernier élément.

- $\omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$ est un ordinal limite.
  Par l'absurde, supposons qu'il existe $\alpha$ tel que $\alpha < \omega$ et qu'il n'existe aucun ordinal $\beta$ tel que $\alpha < \beta < \omega$.
  Alors : $\alpha < \omega$ donc $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $\alpha = n$.
  Mais, $n < n + 1 < \omega$ : contradiction.
- Soit $\alpha$ un nombre ordinal limite et $A$ un ensemble bien ordonné d'ordinal $\alpha$. Supposons que $A$ admet un dernier élément. Alors, $A = \{a \in A / a \leqslant b\}$ où $b$ est le dernier élément de $A$. $P(b)$ étant un segment de $A$ distinct de A, son ordinal $\beta$ vérifie $\beta < \alpha$. Si l'on suppose qu'il existe $\gamma$ tel que $\beta < \gamma < \alpha$, alors il existerait $c \in A$ tel que $\gamma = \mathrm{ord}(P(c))$ et $\mathrm{ord}(P(b)) < \mathrm{ord}(P(c))$. Donc $b < c$ ce qui est absurde car $b$ ne serait plus le dernier élément. Tout ceci montre que $\alpha$ est le successeur de $\beta$ : contradiction.

**Proposition 21.** *Tout ordinal admet un successeur.*

**Démonstration.** Soit $(A, \leqslant)$ un ensemble bien ordonné d'ordinal $\alpha$ et soit $x \notin A$. On prolonge l'ordre de $A$ sur l'ensemble $B = A \cup \{x\}$ en posant pour tout $a \in A$, $a < x$. Muni de cet ordre, $B$ est bien ordonné ; on note $\beta$ son type d'ordre. $A$ est un segment de $B$ distinct de $B$ donc $\alpha < \beta$. Si on suppose qu'il existe $\alpha < \gamma < \beta$, par la proposition 18, $B$ possède un segment $C$ distinct de $B$ d'ordinal $\gamma$ et tel que $A \subsetneq C$ ce qui est impossible car $A$ est clairement le plus "grand" segment de $B$. Donc $\beta$ est le successeur de $\alpha$. □

## 3. L'induction transfinie

L'une des propriétés essentielles de $\mathbb{N}$ est d'être un ensemble bien ordonné. C'est de cette propriété que vient la validité de la classique démonstration par récurrence. On va montrer que l'on peut étendre ce principe aux familles indexées par les nombres ordinaux (représentant des ensembles bien ordonnés).

**Principe.**
*Soit $\mathcal{P}(\mu)$ une proposition, $\mu$ un ordinal supérieur ou égal à $\mu_0$. Si on montre que*

*i. $\mathcal{P}(\mu_0)$ est vraie,*

*ii. Si $\mathcal{P}(\mu)$ est vraie pour tout ordinal $\mu$, $\mu_0 \leqslant \mu < \lambda$, alors $\mathcal{P}(\lambda)$ est vraie*

*alors $\mathcal{P}(\mu)$ est vraie pour tout ordinal $\mu$ supérieur ou égal à $\mu_0$.*

**Démonstration.**
On raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe $\bar{\mu} > \mu_0$ tel que la proposition $\mathcal{P}(\bar{\mu})$ soit fausse. Soit $E$ un ensemble bien ordonné de type d'ordre $\bar{\mu} + 1$. Pour tout $x \in E$, on note $\mu_x = \text{ord}(P(x))$. Soit l'ensemble $\Gamma = \{x \in E \colon \mu_x > \mu_0 \text{ et } \mathcal{P}(\mu_x) \text{ fausse}\}$. $\Gamma$ est un sous-ensemble non vide de l'ensemble bien ordonné $E$ car comme $\bar{\mu} < \bar{\mu} + 1$, il existe $\bar{x}$ tel que $\bar{\mu} = \mu_{\bar{x}}$ (et donc $\bar{x} \in \Gamma$) . Soit $y$ son plus petit élément. $\mathcal{P}(\mu)$ est donc vraie pour tout $\mu_0 \leqslant \mu < \mu_y$ et par ii. $\mathcal{P}(\mu_y)$ est vraie : absurde. □

On veut maintenant définir une fonction $f(\mu)$ pour tout ordinal $\mu > \mu_0$ (ou pour tout ordinal d'un domaine $\mu_0 < \mu < \nu_0$).

**Théorème 22.** *(définition par induction transfinie)*
*On suppose que*

*i. $f(\mu_0)$est définie,*

*ii. Pour tout ordinal $\lambda$ du domaine, il existe une loi $G(\lambda)$ telle que si $f(\mu)$est définie pour tout $\mu_0 \leqslant \mu < \lambda$, alors $f(\lambda)$ est déterminée de façon unique d'après la loi $G(\lambda)$ et les valeurs $f(\mu)$ avec $\mu_0 \leqslant \mu < \lambda$*

*alors $f(\mu)$ est bien définie pour tout $\mu$ du domaine donné.*

**Démonstration.** Par récurrence transfinie avec $\mathcal{P}(\mu)$ la proposition "$f(\mu)$ est bien définie". □

**Remarque 23.** On reprend les notations du théorème 22.
Lorsque l'on fait une définition par induction transfinie, on peut procéder de la manière suivante :

- Si $\lambda$ est successeur alors $\lambda$ s'écrit $\lambda = \nu + 1$ et $f(\lambda)$ est déterminée par $f(\nu)$ et la loi $G(\lambda)$.
- Si $\lambda$ est un ordinal limite alors $f(\lambda)$ est déterminée par $\{f(\mu)/\mu < \lambda\}$ et la loi $G(\lambda)$.

## 4. Représentant canonique d'un ordinal

On définit par récurrence transfinie les ensembles suivants :

- $\mathrm{E}_0 = \emptyset$
- $\mathrm{E}_1 = \{E_0\}$
- $\mathrm{E}_2 = \{E_0, \mathrm{E}_1\}$...
- $\mathrm{E}_\alpha = \{E_\beta / \beta < \alpha\}$

On définit un ordre sur les ensembles $\mathrm{E}_\alpha$ par :
$\forall \beta, \gamma < \alpha, E_\beta \leqslant E_\gamma \Longleftrightarrow \beta \leqslant \gamma$.

**Remarque 24.** $\mathrm{E}_\beta < E_\gamma \Longleftrightarrow E_\beta \in E_\gamma$.

**Proposition 25.** *Pour tout ordinal $\alpha$, $E_\alpha$ est un ensemble bien ordonné (par la relation $\leqslant$ ) de type d'ordre $\alpha$.*

**Démonstration.** Soit $\alpha$ un nombre ordinal.
Soit $A$ un ensemble bien ordonné de type d'ordre $\alpha$ et montrons que $A$ et $E_\alpha$ sont semblables.
Soit $f(x)$ le type d'ordre du segment $P(x)$ pour $x \in A$.
Soit $E_{f(x)}$ l'ensemble correspondant.
On a : $f(x) < \alpha$.
Soit l'application $\Phi \colon A \longrightarrow E_\alpha$ définie par $\Phi(x) = E_{f(x)}$. Elle est bijective croissante. En effet :

- $\Phi$ est croissante : soit $x, x' \in A$ tels que $x < x', P(x)$ et $P(x')$ les segments correspondants. Alors, $f(x) < f(x')$ c'est à dire que $E_{f(x)} < E_{f(x')}$.
  Alors, $\Phi$ est strictement croissante donc injective.
- $\Phi$ est surjective : soit $E_\beta \in E_\alpha$ c'est à dire que $\beta < \alpha$.
  D'après la proposition 18, $\exists x \in A$ tel que $\beta = \mathrm{ord}(P(x)) = f(x)$. □

$E_\alpha$ est le représentant canonique de $\alpha$.
Par abus de notation, on écrira :

- $0 = E_0$
- $1 = E_1$...
- $\alpha = E_\alpha$

Ainsi, $\alpha = \{\beta / \beta < \alpha\}$.
On peut donc confondre un nombre ordinal et son représentant canonique.
Dans ce cas, on peut énoncer le théorème suivant :

**Théorème 26.** *Tout ensemble de nombres ordinaux est bien ordonné (par la relation $\leqslant$ ).*

**Démonstration.** Il suffit de montrer que tout ensemble non vide $A$ de nombres ordinaux contient un premier élément.
Soit $\alpha \in A$.
Si $\alpha$ n'est pas le premier élément de $A$ alors l'ensemble $E_\alpha \cap A$ est non vide.
D'après la proposition précédente, soit alors $\beta$ le premier élément de $E_\alpha \cap A$.
Nous allons montrer que $\beta$ est le premier élément de $A$.
Soit $\delta \in A$.

- Si $\delta < \alpha$ alors $\delta \in E_\alpha \cap A$ donc $\beta < \delta$ ou $\beta = \delta$ par définition de $\beta$.
- Sinon $\delta \notin E_\alpha$, alors soit $\alpha = \delta$ , soit $\alpha < \delta$. Dans les deux cas, on obtient $\beta < \delta$.

Dans tous les cas, on a soit $\beta = \delta$ soit $\beta < \delta$, c'est à dire que $\beta$ est le premier élément de $A$ pour la relation $\leqslant$.
Donc tout ensemble de nombres ordinaux est bien ordonné
(pour la relation $\leqslant$). □

# III. Suites de nombres ordinaux

Dans ce paragraphe, on confond un nombre ordinal avec son représentant canonique.

**Définition 27.** *Une suite transfinie de type $\alpha$ est une fonction dont l'ensemble de définition est l'ensemble $E_\alpha = \alpha$ et dont les valeurs sont des nombres ordinaux.*

On note la suite $(\mu_\beta)_{\beta<\alpha}$ où $\mu_0, \mu_1, \ldots$ sont les valeurs prises par la fonction.

**Définition 28.** *Soit $(\mu_\beta)_{\beta<\alpha}$ une suite.*
*Elle est dite strictement croissante si pour tout $\beta < \gamma < \alpha$, on a $\mu_\beta < \mu_\gamma$.*

**Proposition 29.** *Soit $(\mu_\beta)_{\beta<\alpha}$ une suite strictement croissante de nombres ordinaux.*
*Alors :*
$\exists \mu_\alpha \text{ tel que } \forall \beta < \alpha, \mu_\beta < \mu_\alpha$
*et si* $\exists \lambda \text{ tel que } \forall \beta < \alpha, \mu_\beta < \lambda$ *alors* $\mu_\alpha \leqslant \lambda$.
*On note alors :* $\mu_\alpha = \lim_{\beta<\alpha} \mu_\beta$.

**Démonstration.** Soit $(\mu_\beta)_{\beta<\alpha}$ une suite strictement croissante de nombres ordinaux.
On considère la suite des successeurs $(\mu_\beta + 1)_{\beta<\alpha}$.
Soit $S = \bigcup_{\beta<\alpha} (\mu_\beta + 1) = \bigcup_{\beta<\alpha} \{\mu / \mu < \mu_\beta + 1\}$.
$S$ étant bien ordonné par la relation $\leqslant$, soit $\sigma$ son ordinal.
$\forall \beta < \alpha, \mu_\beta + 1 \subset S$ donc $\mu_\beta + 1 \leqslant \sigma$ donc $\mu_\beta < \mu_\beta + 1 \leqslant \sigma$.
Alors, $\forall \beta < \alpha,\ \mu_\beta < \sigma$.

- soit, $\sigma$ est le nombre ordinal vérifiant
  $\forall \lambda, \forall \beta < \alpha, \mu_\beta < \lambda$ donc $\sigma \leqslant \lambda$
- soit, $\exists \lambda$ tel que pour tout $\beta < \alpha, \mu_\beta < \lambda$ et $\sigma > \lambda$
  Donc, $\{\lambda < \sigma : \text{pour tout } \beta < \alpha, \mu_\beta < \lambda\} \neq \emptyset$
  Soit alors $\delta$ le plus petit élément de cet ensemble.
  Alors, $\delta = \mu_\alpha$. □

**Remarque 30.** Cette définition justifie la notation suivante : pour $\alpha$ nombre ordinal limite, $\alpha = \lim_{\beta<\alpha} \beta$.

**Théorème 31.** *Soit $(\mu_\beta)_{\beta<\alpha}$ une suite strictement croissante de nombres ordinaux.*
*$\mu_\alpha = \lim_{\beta<\alpha} (\mu_\beta)$ est un nombre ordinal limite si et seulement si $\alpha$ est un nombre ordinal limite.*

**Démonstration.** On suppose que $\mu_\alpha$ est un nombre ordinal limite.
Par l'absurde, supposons que $\alpha$ ne soit pas un nombre ordinal limite. Alors, $\alpha$ admet un prédécesseur. Soit $\lambda$ tel que $\lambda + 1 = \alpha$, alors $\mu_\alpha = \lim_{\beta \leqslant \lambda} (\mu_\beta)$.
$\forall \beta < \alpha, \mu_\beta \leqslant \mu_\lambda < \mu_\lambda + 1$ donc $\mu_\alpha \leqslant \mu_\lambda + 1$.
Or, $\lambda < \alpha$ donc $\mu_\lambda < \mu_\alpha$ donc $\mu_\lambda + 1 \leqslant \mu_\alpha \leqslant \mu_\lambda + 1$ donc $\mu_\alpha = \mu_\lambda + 1$ : absurde, car $\mu_\alpha$ est un nombre ordinal limite.
Réciproquement, supposons que $\alpha$ est un nombre ordinal limite. Par l'absurde, supposons que $\mu_\alpha = \gamma + 1$ avec $\gamma < \mu_\alpha$. Si pour tout $\beta$ on a $\mu_\beta < \gamma$, alors $\mu_\alpha \leqslant \gamma$ ce qui est absurde, donc il existe $\beta_0$ tel que $\gamma \leqslant \mu_{\beta_0} < \mu_\alpha$ donc $\gamma = \mu_{\beta_0}$, par définition de $\gamma$. Or, $\alpha$ est un nombre ordinal limite donc $\beta_0 + 1 < \alpha$ et alors $\gamma = \mu_{\beta_0} < \mu_{\beta_0+1} < \mu_\alpha$ ce qui est impossible car $\mu_\alpha = \gamma + 1$. Donc, $\mu_\alpha$ est un nombre ordinal limite. □

**Théorème 32.** *Soit $(\mu_\beta)_{\beta<\alpha}$ une suite strictement décroissante de nombres ordinaux. Alors, cette suite ne contient qu'un nombre fini d'éléments.*

**Démonstration.** Soit $(\mu_\beta)_{\beta<\alpha}$ une suite strictement décroissante de nombres ordinaux.

- si $\alpha$ est fini, il n'y a rien à démontrer.
- sinon, $\alpha$ est transfini, c'est à dire que $\omega \leqslant \alpha$.
  Soit la sous-suite $(\mu_\beta)_{\beta<\omega}$ de $(\mu_\beta)_{\beta<\alpha}$.
  - $(\mu_\beta)_{\beta<\alpha}$ étant bien ordonnée, $(\mu_\beta)_{\beta<\omega}$ admet un plus petit élément, c'est à dire : $\exists n_0 \in \omega$ tel que $\forall \beta < \omega, \mu_\beta \geqslant \mu_{n_0}$.
  - Comme la suite $(\mu_\beta)_{\beta<\alpha}$ est strictement décroissante :
    $\forall n_0 < \beta < \omega, \mu_\beta < \mu_{n_0}$ : contradiction.

  Donc, $\alpha$ est fini. □

**Note 33.** Soient $(\mu_\beta)_{\beta<\alpha}$ et $(\nu_\beta)_{\beta<\alpha}$ deux suites strictement croissantes telles que $\forall \beta < \alpha, \mu_\beta \leqslant \nu_\beta$.
Alors, $\lim_{\beta<\alpha}\mu_\beta \leqslant \lim_{\beta<\alpha}\nu_\beta$.

**Démonstration.** $\forall \beta < \alpha, \mu_\beta \leqslant \nu_\beta < \lim_{\beta<\alpha}\nu_\beta$.
Par définition de $\lim_{\beta<\alpha}\mu_\beta$, on obtient directement : $\lim_{\beta<\alpha}\mu_\beta \leqslant \lim_{\beta<\alpha}\nu_\beta$. □

# IV. Les nombres cardinaux

## 1. Définition des cardinaux

Nous avons vu que la notion d'ordinal permet de classifier les ensembles bien ordonnés. On souhaite maintenant classer les ensembles selon leur taille et définir une notion de quantité (indépendante de l'ordre) : c'est la notion de cardinal.

**Définition 34.** *Soient $E$ et $F$ deux ensembles. On dit qu'ils sont équipotents ou qu'ils ont le même cardinal s'il existe une bijection de $E$ sur $F$.*

Si $E$ et $F$ sont équipotents on note $E \sim F$.
On a les propriétés immédiates:
- Si $E \sim F$ alors $F \sim E$
- $E \sim E$
- Si $E \sim F$ et $F \sim G$ alors $E \sim G$

Ces propriétés légitiment la définition suivante:

**Définition 35.** *On appelle nombre cardinal une classe d'ensembles équipotents.*

Si $E$ est un ensemble, on appellera cardinal de $E$ (noté $\mathrm{card}(E)$) le nombre cardinal correspondant à $E$.
On appelle cardinal transfini tout cardinal d'ensemble infini.
On note $\aleph_0 = \mathrm{card}\,\mathbb{N}$.

**Remarque 36.** Si $E$ est un ensemble fini, $\mathrm{card}(E)$ représente le nombre d'éléments de $E$. En effet, si $E$ compte $n$ éléments, $E$ est équipotent à l'ensemble $\{1, ..., n\}$. On note alors $\mathrm{card}(E) = n$. D'une façon générale, $\mathrm{card}(E)$ représente la taille de $E$.

## 2. Comparaison de nombres cardinaux

D'après la définition, $\mathrm{card}(E) = \mathrm{card}(F)$ ssi $E \sim F$.

**Définition 37.** $\mathrm{card}(E) < \mathrm{card}(F)$ *s'il existe une application $f$: $E \longrightarrow F$ injective et s'il n'existe pas d'application $g$: $E \longrightarrow F$ bijective.*

Cette définition équivaut à : $\mathrm{card}(E) < \mathrm{card}(F)$ s'il existe une application

$f: F \longrightarrow E$ surjective et s'il n'existe pas d'application g: $E \longrightarrow F$ bijective.
On dit qu'un ensemble $E$ est dénombrable si $\mathrm{card}(E) \leqslant \aleph_0$.

**Proposition 38.** *Soit $E$ un ensemble et $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de $E$. Alors,* $\mathrm{card}(E) < \mathrm{card}(\mathcal{P}(E))$.

**Démonstration.** L'application $f: E \longrightarrow \mathcal{P}(E)$,
$x \longmapsto \{x\}$ est injective.
On suppose qu'il existe une bijection $g$ de $E$ sur $\mathcal{P}(E)$.
Soit $A = \{x \in E : x \notin g(x)\}$. $A$ est un élément de $\mathcal{P}(E)$ donc il existe un unique $a \in E$ tel que $A = g(a)$. Si $a \in A$, alors $a \notin g(a)$ donc $a \notin A$ : contradiction. Sinon, $a \notin A$ donc $a \in g(a)$ c'est à dire $a \in A$ : contradiction. Dans tous les cas, on aboutit à une contradiction donc $\mathrm{card}(E) < \mathrm{card}\,(\mathcal{P}(E))$. □

### 3. Ordinaux et cardinaux

Soit $\alpha$ un nombre ordinal. $\alpha$ représente une classe d'ensembles semblables donc a fortiori équipotents. On peut donc définir $\mathrm{card}(\alpha)$ qui est le nombre cardinal représentant cette classe d'ensembles équipotents.
Soit maintenant $\mathfrak{a}$ un nombre cardinal et $E$ un ensemble de cardinal $\mathfrak{a}$. D'après le théorème du bon ordre, $E$ peut être bien ordonné (d'une infinité de façons si $\mathrm{card}(E)$ est transfini). Ainsi, des ordinaux distincts peuvent avoir le même cardinal.

**Exemple 39.** Les ensembles bien ordonnés $\omega = \{1, 2, 3, ....\}$ et $\{2, 3, ...., 1\}$ ne sont pas semblables mais sont équipotents de cardinal $\aleph_0$.

**Remarque 40.** Si $E$ est un ensemble fini, alors $\mathrm{ord}(E) = \mathrm{card}(E)$.

### 4. Classification des ordinaux

Dans ce paragraphe, on confond un nombre ordinal et son représentant canonique.

Rappel: nous avons noté $\omega = \mathrm{ord}\,(\mathbb{N})$.
$\omega$ est le plus petit ordinal transfini (c'est à dire de cardinal transfini). Donc, un ordinal $\alpha$ est fini si et seulement si $\alpha < \omega$.
Soit $\Theta$ l'ensemble des ordinaux dénombrables. Par le Théorème 26, il est bien ordonné. On note $\omega_1$ son ordinal.

**Proposition 41.** *$\omega_1$ est le plus petit ordinal non dénombrable.*

**Démonstration.** Si $\alpha$ est un ordinal dénombrable alors $\alpha$ est un segment de $\Theta$ distinct de $\Theta$ donc $\alpha < \omega_1$. Donc par la Proposition 14-i, $\omega_1$ n'est pas dénombrable. Réciproquement, si $\beta$ est un ordinal tel que $\beta < \omega_1$, alors $\beta$ est semblable à un segment de $\Theta$ distinct de $\Theta$, donc il existe $\alpha \in \Theta$ tel que
$\beta = P(\alpha)(= \alpha)$. Donc, $\alpha = \beta$ et $\beta$ est dénombrable. □

On a en fait montré que $\Theta = \omega_1$. Donc un ordinal $\alpha$ est dénombrable si et seulement si $\alpha < \omega_1$.

## V. Somme de deux ordinaux

### 1. Définition de la somme ordinale

Nous ne considérons que des ensembles bien ordonnés.

**Proposition 42.** *Soient $A$ et $B$ deux ensembles. Alors, il existe deux ensembles $A'$ et $B'$, respectivement de même type d'ordre que $A$ et $B$ et tels que*

$A' \cap B' = \emptyset$.

**Démonstration.** Il suffit de prendre $A' = A \times \{0\}$ et $B' = B \times \{1\}$. Alors, $A' \cap B' = \emptyset$ et les applications $f: A \longrightarrow A'$, $g: B \longrightarrow B'$ définies par $f(x) = (x, 0)$ et $g(x) = (x, 1)$ sont des bijections croissantes. □

**Note 43.** $\alpha$ et $\beta$ étant des ordinaux quelconques, il existe des ensembles $A$ et $B$ tels que $\alpha = \text{ord}(A)$, $\beta = \text{ord}(B)$ et $A \cap B = \emptyset$.

**Définition 44.** *Soient $A$ et $B$ deux ensembles tels que $A \cap B = \emptyset$. On définit un ordre sur l'ensemble $A \cup B$ en posant que tout élément de l'ensemble $A$ précède tout élément de l'ensemble $B$ et que dans chacun des ensembles $A$ et $B$ pris séparément, l'ordre est inchangé.*

**Proposition 45.** *L'ensemble $A \cup B$ muni de cet ordre est un ensemble bien ordonné.*

**Démonstration.** Soit $C$ un sous-ensemble non vide de $A \cup B$ et montrons que $C$ admet un plus petit élément.

- si $C \subset B$ : alors $C$ admet un plus petit élément car $B$ est bien ordonné.
- sinon $C$ peut s'écrire $C = (C \cap A) \cup (C \cap B)$ avec $C \cap A \neq \emptyset$ et $C \cap B \neq \emptyset$ et comme $C \cap A \subset A$ admet un plus petit élément alors $C$ admet un plus petit élément.

Donc, d'après sa construction, $A \cup B$ est un ensemble bien ordonné. □

**Théorème 46.** *Soient des ensembles $A$ et $A_1$ de même type d'ordre, $B$ et $B_1$ de même type d'ordre avec $A \cap B = A_1 \cap B_1 = \emptyset$.*
*Alors,* $\text{ord}(A \cup B) = \text{ord}(A_1 \cup B_1)$.

**Démonstration.** Immédiat. □

Ceci légitime la définition suivante :

**Définition 47.** *Soient $\alpha = \text{ord}(A)$ et $\beta = \text{ord}(B)$ avec $A \cap B = \emptyset$ : la somme $\alpha + \beta$ est* $\text{ord}(A \cup B)$.

**Exemple 48.**

- $\text{ord}(\mathbb{N} \cup \{s\}) = \omega + 1$ avec $s \notin \mathbb{N}$.
- $\text{ord}(\{s\} \cup \mathbb{N}) = 1 + \omega$ avec $s \notin \mathbb{N}$.
  Or, il existe une bijection croissante entre les ensembles $\{s\} \cup \mathbb{N}$ et $\mathbb{N}$ donc $\text{ord}(\{s\} \cup \mathbb{N}) = \omega$.
- $\text{ord}(\{2,3\} \cup \{4\}) = \text{ord}(\{2,3,4\}) = 3$
  En fait, on a la généralisation suivante :
  Soient, $n = \text{ord}(A)$, $m = \text{ord}(B)$ avec $A \cap B = \emptyset$ et $n, m \in \mathbb{N}$.
  On peut prendre $A$ et $B$ tels que :
  $A = \{0, 1, \ldots, n-1\}$
  $B = \{n, n+1, \ldots, n+m-1\}$
  Alors : $n + m = \text{ord}(\{0, 1, \ldots, n-1\} \cup \{n, n+1, \ldots, n+m-1\})$
  $= \text{ord}(\{0,1,\ldots,n+m-1\})$.

En généralisant, on définit la *somme ordonnée* quelconque de nombres ordinaux.
Soit $(\mu_\beta)_{\beta<\alpha}$ une suite transfinie de type $\alpha$.
Soient des ensembles $M_\beta$ deux à deux disjoints, d'ordinaux respectifs $\mu_\beta$, et $\mathfrak{S} = \bigcup_{\beta<\alpha} M_\beta$ leur réunion que l'on ordonne de la manière suivante :
soient $x$ et $y$ des éléments de $\mathfrak{S}$ :

- si $x \in M_\beta$ et $y \in M_\delta$ avec $\beta < \delta$ alors on pose $x < y$,

- sinon $x$, $y \in M_\beta$ et on pose $x \leqslant y$ si et seulement si $x \leqslant y$ dans $M_\beta$.

Muni de cet ordre, $\mathfrak{S}$ est un ensemble bien ordonné. On pose alors $\sum_{\beta<\alpha} \mu_\beta = \mathrm{ord}(\mathfrak{S})$.

## 2. Propriétés de la somme ordinale

i. $\boxed{\text{La somme ordinale n'est pas commutative}}$
En effet, $\mathrm{ord}(\mathbb{N}^* \cup \{s\}) = \omega + 1$ et $\mathrm{ord}(\{s\} \cup \mathbb{N}^*) = 1 + \omega$ avec $s \notin \mathbb{N}$.
Par définition de l'ordre sur $\mathbb{N}^* \cup \{s\}$ : $\forall n \in \mathbb{N}^*, n \leqslant s$.
Donc, $\mathbb{N}^* \cup \{s\}$ admet un plus grand élément contrairement à $\{s\} \cup \mathbb{N}^*$.
D'où, $1 + \omega \neq \omega + 1$.

ii. $\boxed{(\alpha+\beta)+\gamma = \alpha + (\beta+\gamma) \text{ associativité}}$
La preuve est immédiate.

iii. $\boxed{\alpha + 0 = \alpha \text{ et } 0 + \alpha = \alpha}$
La preuve est immédiate.

iv. $\boxed{\alpha = \beta \Longrightarrow \alpha + \gamma = \beta + \gamma}$
La preuve est immédiate.

v. $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \alpha + n = \beta + n \Longrightarrow \alpha = \beta}$
Soient $\alpha = \mathrm{ord}(A), \beta = \mathrm{ord}(B), n = \mathrm{ord}(\{1, ..., n\})$ avec $A \cap \{1, ..., n\} = B \cap \{1, ..., n\} = \emptyset$.
Comme $A \cup \{1, ..., n\}$ et $B \cup \{1, ..., n\}$ ont le même type d'ordre, il existe $f: A \cup \{1, ..., n\} \longrightarrow B \cup \{1, ..., n\}$ bijective croissante.
On a : $f(n) = n$ car $n$ est le dernier élément de $A \cup \{1, ..., n\}$ et $f$ est bijective croissante.
Par récurrence finie, on obtient que $\forall i \in \{1, ..., n\}, f(i) = i$.
Ainsi, $f_{|A}: A \longrightarrow B$ est bijective croissante.
D'où, $\alpha = \beta$.

vi. $\boxed{\alpha < \beta \Longleftrightarrow \exists \gamma > 0, \beta = \alpha + \gamma}$
$\Longrightarrow$ Soient $\alpha = \mathrm{ord}(A)$ et $\beta = \mathrm{ord}(B)$.
Par hypothèse, soit $C$ un segment de $B$ distinct de $B$ tel que $A$ et $C$ soient semblables.
Alors, $B = C \cup (B \backslash C)$ avec $\gamma \neq 0$ le type d'ordre de l'ensemble $B \backslash C$ et $\mathrm{ord}(B) = \mathrm{ord}(C) + \mathrm{ord}(B \backslash C)$ c'est à dire que $\beta = \alpha + \gamma$.
$\Longleftarrow$ Soient $\alpha = \mathrm{ord}(A), \gamma = \mathrm{ord}(C)$ et $A \cap C = \emptyset$.
Alors, $\beta = \mathrm{ord}(A \cup C)$.
Or, $A$ étant un segment de $A \cup C$ distinct de $A \cup C$, $\alpha < \beta$.

**Remarque 49.** L'écriture "$\alpha + 1$" du successeur de $\alpha$ se trouve ainsi justifiée.

vii. $\boxed{\alpha < \beta \Longrightarrow \gamma + \alpha < \gamma + \beta}$
D'après v, $\exists \delta > 0$ tel que : $\alpha + \delta = \beta$.
Alors : $\gamma + \beta = \gamma + \alpha + \delta = (\gamma + \alpha) + \delta > \gamma + \alpha$.

viii. $\boxed{\alpha < \beta \Longrightarrow \alpha + \gamma \leqslant \beta + \gamma}$
Soient $\alpha = \mathrm{ord}(A), \beta = \mathrm{ord}(B), \gamma = \mathrm{ord}(C)$ avec $A \cap C = B \cap C = \emptyset$.
Soit $D$ un segment de $B$ distinct de $B$ tel que $A$ et $D$ soient semblables.
Alors, $D \cup C \subset B \cup C$ et par conséquent $\mathrm{ord}(D \cup C) \leqslant \mathrm{ord}(B \cup C)$ d'où $\alpha + \gamma \leqslant \beta + \gamma$.

**Exemple 50.** On ne peut pas préciser, en effet :

- $\forall n \in \mathbb{N}, n + \omega = \omega$ car $n = \mathrm{ord}(\{1, ..., n\})$ et $\omega = \mathrm{ord}(\{n+1, n+2, ...\})$.
  $n + \omega = \mathrm{ord}(\{1, ..., n, n+1, n+2, ...\})$
  Ainsi, $\forall n, m \in \mathbb{N}, n + \omega = m + \omega = \omega$ (cas d'égalité).

- $1 < 2$ et $4 = 1 + 3 < 2 + 3 = 5$ (cas d'inégalité stricte).
- Par contre, d'après la propriété v) :
  $\alpha < \beta \Longrightarrow \alpha + n < \beta + n$, avec $n \in \mathbb{N}$.

ix. $\boxed{\alpha < \beta \text{ et } \gamma < \delta \Longrightarrow \alpha + \gamma < \beta + \delta}$
On a : $\beta + \delta \geqslant \alpha + \delta > \alpha + \gamma$.

x. $\boxed{\forall \alpha, \exists!\, \beta \,\text{limite}, \exists! n \in \mathbb{N} \text{ tel que } \alpha = \beta + n}$
Existence : On raisonne par récurrence transfinie.

- si $\alpha = 0$, on prend $\beta = 0, n = 0$
- On suppose que la propriété est vraie pour tout $\gamma < \alpha$.
  - si $\alpha$ est un nombre ordinal limite alors $\alpha = \alpha + 0$
  - sinon, $\alpha = \gamma + 1 = (\beta + n) + 1 = \beta + (n + 1)$ par application de l'hypothèse de récurrence.

Unicité : supposons qu'il existe $\beta, \delta$ limites et $n, m \in \mathbb{N}$, tels que :
$\alpha = \beta + n = \delta + m$. Si $n \neq m$, par exemple $n < m$, soit $p \in \mathbb{N}$ tel que
$m = n + p = p + n$.
Alors, $\delta + m = \delta + p + n = \beta + n$ par hypothèse.
D'après la cinquième propriété, $\delta + p = \beta$ : absurde car $\beta$ est limite.
Donc, $n = m$ et par suite $\delta = \beta$.

Par contraposée des règles précédentes et d'après les propriétés sur la comparaison des nombres ordinaux, on obtient les règles suivantes :

a) $\alpha + \beta < \alpha + \delta \Longrightarrow \beta < \delta$

b) $\beta + \alpha < \delta + \alpha \Longrightarrow \beta < \delta$

c) $\alpha + \beta = \alpha + \delta \Longrightarrow \beta = \delta$

d) $\alpha + \beta = \delta + \gamma, \beta < \gamma \Longrightarrow \alpha > \delta$

**Théorème 51.** *Soit $\nu = \lim_{\mu < \nu} \mu$ un ordinal limite et $\alpha$ un ordinal quelconque. Alors $\alpha + \nu$ est un ordinal limite et l'on a :*
$\alpha + \nu = \alpha + \lim_{\mu < \nu} \mu = \lim_{\mu < \nu} (\alpha + \nu)$.

**Démonstration.** En effet, posons $(\delta_\mu)_{\mu < \nu} = (\alpha + \mu)_{\mu < \nu}$ ordonnée dans l'ordre croissant des $\mu$.
D'après le théorème 31, $\nu$ étant limite, $\delta_\nu = \lim_{\mu < \nu} (\alpha + \mu)$ est un nombre ordinal limite.
Par définition, $\nu = \lim_{\mu < \nu} \mu$.
Nécessairement, $\forall \mu, \mu < \nu$.
Donc, $\forall \mu, \alpha + \mu < \alpha + \nu$.
Alors, $\forall \delta_\mu, \mu < \nu$, on a $\delta_\mu < \alpha + \nu$.
Donc, par définition, $\delta_\nu \leqslant \alpha + \nu$.
Réciproquement, on a $\delta_\nu = \lim_{\mu < \nu} (\alpha + \mu)$.
Donc, $\delta_\nu > \alpha + \mu, \forall \mu < \nu$ alors $\delta_\nu > \alpha$ et il existe $\gamma > 0$ tel que $\delta_\nu = \alpha + \gamma$.
On obtient alors que, $\forall \mu < \nu, \alpha + \mu < \alpha + \gamma$.
Donc, $\mu < \gamma, \forall \mu < \nu$.
Donc, $\nu \leqslant \gamma$ et alors $\alpha + \nu \leqslant \alpha + \gamma = \delta_\nu$.
D'où, $\alpha + \lim_{\mu < \nu} \mu = \lim_{\mu < \nu} (\alpha + \nu)$. □

# VI. Produit de deux ordinaux

## 1. Définition du produit ordinal

**Définition 52.** *Soient $\alpha, \beta$ deux nombres ordinaux.*
*On définit le produit $\alpha \times \beta$ comme la somme ordonnée de $\beta$ termes égaux à $\alpha$ :*
$\alpha + \alpha + \ldots + \alpha$

Nous allons montrer qu'à partir de cette définition, nous pouvons exprimer le produit ordinal d'une autre manière.

**Définition 53.** *On définit un ordre sur l'ensemble $A \times B$ en posant :*
$\forall (a_1, b_1), (a_2, b_2) \in A \times B,$

$$(a_1, b_1) < (a_2, b_2) \Longleftrightarrow b_1 < b_2 \text{ ou } (b_1 = b_2 \text{ et } a_1 < a_2).$$

*L'ordre ainsi défini est un bon ordre.*

**Théorème 54.** *Soient $A$ et $A_1$ de même type d'ordre, $B$ et $B_1$ de même type d'ordre. Alors, les produits cartésiens $A \times B$ et $A_1 \times B_1$ ont le même type d'ordre.*

**Démonstration.** Immédiat. □

Ceci légitime la définition suivante :

**Définition 55.** *Soient $\alpha = \mathrm{ord}(A)$ et $\beta = \mathrm{ord}(B)$ : le produit $\alpha \times \beta$ est alors* $\mathrm{ord}(A \times B)$.

**Exemple 56.**

- $\forall n, p \in \mathbb{N}, n \times p = np$.
  La propriété est vraie si $n = 0$, ou $p = 0$.
  Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. Alors : $n \times p = \mathrm{ord}(\{0, 1, \ldots, n-1\} \times \{0, 1, \ldots, p-1\})$ et $np = \mathrm{ord}(\{0, 1, \ldots, np-1\})$.
  Soit $f$ l'application à valeurs dans $\mathbb{N}$, définie sur le produit cartésien $\{0, 1, \ldots, n-1\} \times \{0, 1, \ldots, p-1\}$ par :
  $$f((i, j)) = i + nj \text{ avec } 0 \leqslant i \leqslant n-1 \text{ et } 0 \leqslant j \leqslant p-1$$
  On a : $0 \leqslant i + nj \leqslant n - 1 + n(p-1)$ c'est à dire que $0 \leqslant i + nj \leqslant np - 1$
  Donc, $f$ est à valeurs dans l'ensemble $\{0, 1, \ldots, np-1\}$.
  Montrons que $f$ est une application bijective croissante.
  • $f$ est une bijection du produit $\{0, 1, \ldots, n-1\} \times \{0, 1, \ldots, p-1\}$ sur $\{0, 1, \ldots, np-1\}$.
  Soit $k \in \{0, 1, \ldots, np-1\}$. Si $k$ a un antécédent $(i, j)$, on a $k = i + nj$ avec $0 \leqslant i \leqslant n-1$ et $0 \leqslant j \leqslant p-1$. Donc, $i$ et $j$ sont respectivement reste et quotient dans la division euclidienne de $k$ par $n$. D'où l'unicité de l'antécédent $(i, j)$.
  Réciproquement, si $i$ et $j$ sont ainsi définis, on a :
  $k = i + nj$ et $0 \leqslant i \leqslant n - 1$ ; enfin, si $j \geqslant p$ alors $i + nj \geqslant np$, ce qui est absurde ; donc, $0 \leqslant j \leqslant p-1$ et ce couple $(i, j)$ est bien un antécédent de $k$.
  • $f$ est croissante : soient $(i_1, j_1), (i_2, j_2) \in \{0, 1, \ldots, n-1\} \times \{0, 1, \ldots, p-1\}$.
  $*$ si $j_1 < j_2$ : alors $nj_1 < nj_2$ et $i_1 \leqslant n-1$ et $i_2 \leqslant n-1$
  Donc, $i_1 + nj_1 \leqslant n - 1 + nj_1 = n(j_1 + 1) - 1$
  Or, $j_2 \geqslant j_1 + 1$ donc $nj_2 \geqslant n(j_1 + 1)$ et $nj_2 > n(j_1 + 1) - 1$
  Par conséquent, $i_1 + nj_1 < i_2 + nj_2$
  $*$ si $j_1 = j_2$ et $i_1 < i_2$ : alors on obtient immédiatement que $i_1 + nj_1 < i_2 + nj_2$.
  D'où le résultat, $n \times p = np$.

Montrons que cette deuxième définition résulte bien de la première.
Soient $\alpha, \beta$ deux nombres ordinaux tels que $\alpha = \mathrm{ord}(A)$ et $\beta = \mathrm{ord}(B)$.
$\forall b \in B$, on considère les ensembles deux à deux disjoints :
$A \times \{b\} = A_b$ de type d'ordre $\alpha$.
D'après la première définition, l'ordinal de la réunion ordonnée $A \times (\bigcup_{b \in B} \{b\})$ est la somme ordonnée des $\beta$ termes $\alpha + \alpha + \ldots + \alpha = \alpha \times \beta$.

On vérifie facilement que $A \times B$ et $A \times \bigcup_{b \in B} \{b\}$ ont le même type d'ordre, donc ord$(A \times B)$=ord$(A \times (\bigcup_{b \in B} \{b\}))$=$\alpha \times \beta$.

## 2. Propriétés du produit ordinal

i. $\boxed{\text{Le produit ordinal n'est pas commutatif}}$

En effet, considérons les produits $2 \times \omega$ et $\omega \times 2$.
Le premier peut être représenté par l'ensemble ordonné $\{a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, ...\}$. On voit que $2 \times \omega = \omega$.
Alors que le second peut être représenté par $\{1, 3, 5, ..., 2, 4, 6, ...\}$. Cet ensemble, qui contient des éléments précédés d'une infinité d'éléments comme l'élément 2, ne peut pas être semblable à l'ensemble représentant $2 \times \omega$ qui ne contient pas de tels éléments. Donc, $2 \times \omega \neq \omega \times 2$.

ii. $\boxed{(\alpha \times \beta) \times \gamma = \alpha \times (\beta \times \gamma)}$

L'application $f: (A \times B) \times C \longrightarrow A \times (B \times C)$ définie par $f((x, y), z) = (x, (y, z))$ est bijective croissante.

iii. $\boxed{\alpha \times 0 = 0 \text{ et } 0 \times \alpha = 0}$

Soit $\alpha = \text{ord}(A)$, alors $\alpha \times 0 = \text{ord}(A \times \emptyset) = \text{ord}(\emptyset) = 0$.
(On procède de la même façon pour $0 \times \alpha = 0$).

iv. $\boxed{\alpha \times 1 = \alpha \text{ et } 1 \times \alpha = \alpha}$

Soient $\alpha = \text{ord}(A)$ et $1 = \text{ord}(\{0\})$.
Donc, $1 \times \alpha = \text{ord}(\{0\} \times A)$ et l'application $f: \{0\} \times A \longrightarrow A$ définie par $f(0, x) = x$ est bijective croissante.
Donc, $1 \times \alpha = \text{ord}(A) = \alpha$.
(On procède de la même façon pour $\alpha \times 1 = \alpha$).

v. $\boxed{\alpha = \beta \Longrightarrow \alpha \times \gamma = \beta \times \gamma}$

Soient $\alpha = \beta = \text{ord}(A)$ et $\gamma = \text{ord}(C)$.
Alors : $\alpha \times \gamma = \text{ord}(A \times C) = \beta \times \gamma$.
Attention : la réciproque est fausse : $1 \times \omega = \text{ord}(\{0\} \times \mathbb{N}) = \text{ord}(\mathbb{N})$ et $2 \times \omega = \omega$ (d'après ce qu'on a fait précédemment).

vi. $\boxed{\alpha \times \beta = 0 \Longleftrightarrow \alpha = 0 \text{ ou } \beta = 0}$

Soient $\alpha = \text{ord}(A)$ et $\beta = \text{ord}(B)$.
On a : $\alpha \times \beta = 0 \Longleftrightarrow \text{ord}(A \times B) = 0 \Longleftrightarrow A \times B = \emptyset$
$\Longleftrightarrow A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$
$\Longleftrightarrow \alpha = 0$ ou $\beta = 0$.

vii. $\boxed{\alpha \times (\beta + \gamma) = \alpha \times \beta + \alpha \times \gamma}$

Attention : la validité de la loi de distributivité n'est pas générale.
En effet, le produit n'y est pas soumis lorsque le premier facteur est une somme.
Par exemple, $(\omega + 1) \times 2 = \omega + 1 + \omega + 1 = \omega \times 2 + 1$
ce qui est différent de $\omega \times 2 + 1 \times 2 = \omega \times 2 + 2$ car le dernier type d'ordre a un avant dernier élément contrairement au premier.
Par contre, la loi de distributivité est valable lorsque le second facteur est une somme.
Soient $\alpha = \text{ord}(A)$, $\beta = \text{ord}(B)$, $\gamma = \text{ord}(C)$ et $B \cap C = \emptyset$.
$\alpha \times (\beta + \gamma) = \text{ord}(A \times (B \cup C))$ or $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ et $(A \times B) \cap (A \times C) = \emptyset$.
De plus, ces deux ensembles ont le même ordre, en effet :
soient $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in A \times (B \cup C)$.
L'ensemble est ordonné par la relation : $(a_1, b_1) < (a_2, b_2)$ si et seulement si
$b_1 \in B$ et $b_2 \in C$
ou $b_1, b_2 \in B$ et $b_1 < b_2$ dans $B$
ou $b_1, b_2 \in C$ et $b_1 < b_2$ dans $C$

ou $b_1 = b_2$ et $a_1 < a_2$ dans $A$.
D'après la définition du produit et de la somme ordinale, l'ensemble $(A \times B) \cup (A \times C)$ est ordonné par la même relation.
Il en résulte que :
$\operatorname{ord}(A \times (B \cup C)) = \operatorname{ord}((A \times B) \cup (A \times C)) = \operatorname{ord}(A \times B) + \operatorname{ord}(A \times C)$
$= \alpha \times \beta + \alpha \times \gamma$.

viii. $\boxed{\alpha < \beta \Longrightarrow \gamma \times \alpha < \gamma \times \beta \text{ si } \gamma > 0}$
D'après les propriétés sur la somme ordinale, $\exists \delta > 0$ tel que $\beta = \alpha + \delta$.
Alors, $\gamma \times \beta = \gamma \times (\alpha + \delta) = \gamma \times \alpha + \gamma \times \delta > \gamma \times \alpha$.

ix. $\boxed{\alpha < \beta \Longrightarrow \alpha \times \gamma \leqslant \beta \times \gamma}$
Soient $\alpha = \operatorname{ord}(A)$, $\beta = \operatorname{ord}(B)$ et $\gamma = \operatorname{ord}(C)$.
Soit $D$ un segment de $B$ distinct de $B$ tel que $A$ et $D$ soient semblables.
Alors, $D \times C \subset B \times C$ et par conséquent $\operatorname{ord}(D \times C) \leqslant \operatorname{ord}(B \times C)$ d'où $\alpha \times \gamma \leqslant \beta \times \gamma$.
Remarque : comme pour la somme, on ne peut pas préciser. On peut avoir des cas d'égalité comme : on a $1 \times \omega = 2 \times \omega$, ou des cas d'inégalité stricte comme $1 \times 3 < 2 \times 3$.

x. $\boxed{0 < \alpha < \beta \text{ et } \gamma < \delta \Longrightarrow \alpha \times \gamma < \beta \times \delta}$
$\beta \times \delta \geqslant \alpha \times \delta > \alpha \times \gamma$.

Par contraposée des règles précédentes et d'après les propriétés sur la comparaison des nombres ordinaux, on obtient les règles suivantes :

a) $\alpha \times \beta < \alpha \times \delta \Longrightarrow \beta < \delta$
b) $\beta \times \alpha < \delta \times \alpha \Longrightarrow \beta < \delta$
c) $\alpha \times \beta = \alpha \times \delta, \alpha > 0 \Longrightarrow \beta = \delta$
d) $\alpha \times \beta = \delta \times \gamma \neq 0, \beta < \gamma \Longrightarrow \alpha > \delta$

**Théorème 57.** *Soient $\alpha > 0$ et $\mu$ deux nombres ordinaux.*
*Alors, il existe un unique couple $(\varepsilon, \eta)$ de nombres ordinaux tels que :*
*$\mu = \alpha \times \eta + \varepsilon$ avec $\varepsilon < \alpha$.*

**Démonstration.**
Existence : On pose $\beta = \mu + 1$
On a alors : $\alpha \times \beta = \alpha \times (\mu + 1) \geqslant \mu + 1 > \mu$
Soient $A$ et $B$ deux ensembles bien ordonnés tels que
$\alpha = \operatorname{ord}(A)$ et $\beta = \operatorname{ord}(B)$. Alors, $\alpha \times \beta = \operatorname{ord}(A \times B)$
Comme $\mu < \alpha \times \beta$, il existe un segment $M$ de $A \times B$ distinct de $A \times B$ tel que $\mu = \operatorname{ord}(M)$.
Posons $M = P(a_0, b_0)$ avec $a_0 \in A$, $b_0 \in B$.
Soit alors : $\eta = \operatorname{ord}(P(b_0))$, avec $\eta < \beta$, et $\varepsilon = \operatorname{ord}(P(a_0))$ avec $\varepsilon < \alpha$.
On peut écrire, d'après l'ordre sur $M$:
$M = P(a_0, b_0) = (A \times P(b_0)) \cup (P(a_0) \times \{b_0\})$
On obtient alors :
$\mu = \operatorname{ord}(M) = \operatorname{ord}(A \times P(b_0)) + \operatorname{ord}(P(a_0) \times \{b_0\}) = \alpha \times \eta + \varepsilon$ avec $\varepsilon < \alpha$
Unicité : Supposons qu'il existe $(\eta_1, \varepsilon_1)$, $(\eta_2, \varepsilon_2)$ tels que :
$\alpha \times \eta_1 + \varepsilon_1 = \alpha \times \eta_2 + \varepsilon_2$ avec $\varepsilon_1 < \alpha$ et $\varepsilon_2 < \alpha$.

- si $\eta_1 = \eta_2$ alors $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$.
- sinon, on peut supposer, sans perte de généralité, que $\eta_1 < \eta_2$
  Alors, $\eta_1 + 1 \leqslant \eta_2$ donc $\alpha \times (\eta_1 + 1) \leqslant \alpha \times \eta_2$.
  Donc,
  $\alpha \times \eta_1 + \alpha + \varepsilon_2 = \alpha \times (\eta_1 + 1) + \varepsilon_2 \leqslant \alpha \times \eta_2 + \varepsilon_2 = \alpha \times \eta_1 + \varepsilon_1$ par hypothèse
  Donc, $\alpha \times \eta_1 + \alpha + \varepsilon_2 \leqslant \alpha \times \eta_1 + \varepsilon_1$.
  Donc, $\alpha + \varepsilon_2 \leqslant \varepsilon_1$.
  Or, $\varepsilon_1 < \alpha$ donc $\varepsilon_1 < \alpha + \varepsilon_2$ ce qui est absurde. □

**Théorème 58.** *Soit $\nu = \lim_{\mu < \nu} \mu$ un ordinal limite et $\alpha$ un ordinal quelconque. Alors, $\alpha \times \nu$ est un ordinal limite et l'on a :*
$\alpha \times \nu = \alpha \times \lim_{\mu < \nu} \mu = \lim_{\mu < \nu} (\alpha \times \nu)$.

**Démonstration.** En effet, posons $(\delta_\mu)_{\mu<\nu} = (\alpha \times \mu)_{\mu<\nu}$ ordonnée dans l'ordre croissant des $\mu$.
D'après le théorème 31, $\nu$ étant limite, $\delta_\nu = \lim_{\mu<\nu} (\alpha \times \mu)$ est un nombre ordinal limite.
Par définition, $\nu = \lim_{\mu < \nu} \mu$.
Nécessairement, $\forall \mu, \mu < \nu$.
Donc, $\forall \mu, \alpha \times \mu < \alpha \times \nu$.
Alors, $\forall \delta_\mu, \mu < \nu$, on a $\delta_\mu < \alpha \times \nu$.
Donc, par définition, $\delta_\nu \leqslant \alpha \times \nu$.
Réciproquement, on a $\delta_\nu = \lim_{\mu<\nu} (\alpha \times \mu)$.
Donc, $\delta_\nu > \alpha \times \mu, \forall \mu < \nu$.
Par ailleurs, il existe un unique couple $(\gamma, \varepsilon)$ avec $\varepsilon < \alpha$ tel que : $\delta_\nu = \alpha \times \gamma + \varepsilon$.
Or, $\forall \alpha \times \mu$, on a $\delta_\nu > \alpha \times \mu$.
Donc, $\alpha \times \mu < \alpha \times \gamma + \varepsilon < \alpha \times \gamma + \alpha = \alpha \times (\gamma + 1)$.
Donc, $\forall \mu, \mu < \gamma + 1$ c'est à dire que $\nu \leqslant \gamma + 1$.
Or, $\nu$ est un nombre ordinal limite, alors : $\nu < \gamma + 1$ donc $\nu \leqslant \gamma$ et
$\alpha \times \nu \leqslant \alpha \times \gamma \leqslant \delta_\nu$ d'où $\delta_\nu = \alpha \times \nu$. □

# VII. Exponentiation ordinale

## 1. Définition de l'exponentiation ordinale

**Définition 59.** *On définit par récurrence transfinie la puissance $\alpha^\beta$ comme le produit de $\beta$ facteurs égaux à $\alpha$.*

- $\alpha^0 = 1$
- *Si* $\forall \gamma < \beta, \alpha^\gamma$ est *déjà défini, on pose :*
  - *si* $\beta = \lambda + 1 : \alpha^\beta = \alpha^\lambda \times \alpha$
  - *si $\beta$ est un ordinal limite :* $\alpha^\beta = \lim_{\lambda < \beta} \alpha^\lambda$

*Alors,* $1^\beta = 1, 0^\beta = 0$ si $\beta > 0$.

**Exemple 60.**

- $2^\omega = \lim_{n<\omega} 2^n = \omega$.
- $\omega^\omega = \lim_{n<\omega} \omega^n$.

## 2. Propriétés de l'exponentiation ordinale

i. $\boxed{\text{En toute généralité, on ne peut pas écrire : } (\alpha \times \beta)^\delta = \alpha^\delta \times \beta^\delta}$
En effet, on a :
$(\omega \times 2)^2 = \omega \times 2 \times \omega \times 2 = \omega \times \omega \times 2 = \omega^2 \times 2$
et $\omega^2 \times 2^2 = \omega^2 \times 4 \neq \omega^2 \times 2$.

ii. $\boxed{\alpha < \beta \text{ et } \mu > 1 \Longrightarrow \mu^\alpha < \mu^\beta}$
On fait une récurrence sur $\beta > \alpha$.

- si $\alpha = 0$ et $\beta = 1$ : alors $\mu^\alpha = \mu^0 = 1$ (par définition) et $\mu^\beta = \mu$ et par hypothèse $\mu > 1$.
- On suppose que la propriété est vraie $\forall 1 \leqslant \lambda < \beta$.
  Démontrons-la pour $\beta$.
  - si $\beta = \gamma + 1$ :
    i. si $\alpha = \gamma$ :
    $\mu^\beta = \mu^{\gamma+1} = \mu^\gamma \times \mu > \mu^\gamma$ d'après la définition.

ii. si $\alpha < \gamma$ :
On a $\mu^\beta > \mu^\gamma > \mu^\alpha$ d'après l'hypothèse de récurrence.

– si $\beta$ est un ordinal limite :

$\mu^\beta = \lim_{\alpha<\gamma<\beta} \mu^\gamma$

donc $\mu^\gamma > \mu^\alpha$, d'après l'hypothèse de récurrence,

et $\lim_{\gamma<\beta} \mu^\gamma > \lim_{\gamma<\beta} \mu^\alpha = \mu^\alpha$.

**Proposition 61.** *Soit $\alpha$ un nombre ordinal quelconque. Soit $(\mu_\beta)_{\beta<\gamma}$ une suite strictement croissante de type $\gamma$, avec $\gamma$ un nombre limite. Soit $\mu_\gamma$ sa limite. Alors : $\alpha^{\mu_\gamma} = \lim_{\beta<\gamma} \alpha^{\mu_\beta}$.*

**Démonstration.** On note $\lambda = \lim_{\beta<\gamma} \alpha^{\mu_\beta}$. $\gamma$ étant un nombre limite, $\mu_\gamma$ l'est aussi donc par définition $\alpha^{\mu_\gamma} = \lim_{\nu<\mu_\gamma} \alpha^\nu$.

- Pour tout $\beta < \gamma$, on a $\mu_\beta < \mu_\gamma$ donc $\alpha^{\mu_\beta} < \alpha^{\mu_\gamma}$. Par définition de $\lambda$, $\lambda \leqslant \alpha^{\mu_\gamma}$.
- Comme la suite $(\mu_\beta)_{\beta<\gamma}$ est croissante, on voit facilement que $\alpha^{\mu_\gamma} = \lim_{\nu<\mu_\gamma} \alpha^\nu = \lim_{\mu_0<\nu<\mu_\gamma} \alpha^\nu$. Alors pour tout $\mu_0 < \nu < \mu_\gamma$ , il existe $\beta < \gamma$ tel que $\nu \leqslant \mu_\beta$ (sinon $\nu > \mu_\beta$ pour tout $\beta$ et donc $\mu_\gamma \leqslant \nu$) ; donc $\alpha^\nu \leqslant \alpha^{\mu_\beta} < \lambda$. Ainsi pour tout $\mu_0 < \nu < \mu_\gamma$, $\alpha^\nu < \lambda$ et finalement $\alpha^{\mu_\gamma} \leqslant \lambda$. □

iii. $\boxed{\alpha^\beta \times \alpha^\delta = \alpha^{\beta+\delta}}$
On fixe $\alpha$ et $\beta$ et on fait une récurrence sur $\delta$.

- si $\delta = 0$: c'est évident.
- On suppose que $\forall \lambda < \delta : \alpha^\beta \times \alpha^\lambda = \alpha^{\beta+\lambda}$
Démontrons-le pour $\delta$.
  - si $\delta = \gamma + 1$:
$$\begin{aligned}\alpha^\beta \times \alpha^\delta &= \alpha^\beta \times \alpha^{\gamma+1} = \alpha^\beta \times (\alpha^\gamma \times \alpha)\\ &= (\alpha^\beta \times \alpha^\gamma) \times \alpha\\ &= (\alpha^{\beta+\gamma}) \times \alpha \quad \text{en appliquant l'hypothèse de récurrence}\\ &= \alpha^{\beta+\gamma+1} = \alpha^{\beta+\delta}\end{aligned}$$
  - si $\delta$ est un ordinal limite :
$$\begin{aligned}\alpha^\beta \times \alpha^\delta &= \alpha^\beta \times \lim_{\gamma<\delta} \alpha^\gamma = \lim_{\gamma<\delta} \alpha^\beta \times \alpha^\gamma \quad \text{d'après le théorème 58}\\ &= \lim_{\gamma<\delta} \alpha^{\beta+\gamma} \quad \text{en appliquant l'hypothèse de récurrence}\\ &= \alpha^{\lim \beta+\gamma} = \alpha^{\beta+\lim \gamma} = \alpha^{\beta+\delta}\end{aligned}$$

iv. $\boxed{(\alpha^\beta)^\delta = \alpha^{\beta\times\delta}}$
Comme précédemment, on fixe $\alpha$ et $\beta$ et on fait une récurrence sur $\delta$.

- si $\delta = 0$: c'est évident.
- On suppose que $\forall \lambda < \delta : (\alpha^\beta)^\lambda = \alpha^{\beta\times\lambda}$.
Démontrons-le pour $\delta$.
  - si $\delta = \gamma + 1$:
$(\alpha^\beta)^\delta = (\alpha^\beta)^{\gamma+1} = (\alpha^\beta)^\gamma \times \alpha^\beta = \alpha^{\beta\times\gamma} \times \alpha^\beta$ en appliquant l'hypothèse de récurrence

Donc,$(\alpha^\beta)^\delta = \alpha^{\beta\times\gamma+\beta\times 1} = \alpha^{\beta\times(\gamma+1)} = \alpha^{\beta\times\delta}$

– si $\delta$ est un ordinal limite :
$(\alpha^\beta)^\delta = \lim_{\gamma<\delta}(\alpha^\beta)^\gamma = \lim_{\gamma<\delta}\alpha^{\beta\times\gamma}$ en appliquant l'hypothèse de récurrence
Donc, $(\alpha^\beta)^\delta = \alpha^{\lim\beta\times\gamma} = \alpha^{\beta\times\lim\gamma} = \alpha^{\beta\times\delta}$

**Exemple 62.**

- $\lim_{n<\omega}(\omega^\omega)^n = (\omega^\omega)^\omega = \omega^{\omega\times\omega} = \omega^{\omega^2}$
- De même, $(\omega^{\omega^2})^\omega = \omega^{\omega^3}$ etc...

v. $\boxed{\alpha \leqslant \beta \text{ et } \delta \geqslant 0 \Longrightarrow \alpha^\delta \leqslant \beta^\delta}$
On fait une récurrence sur $\delta$.

- si $\delta = 0$ alors la propriété est vraie.
- On suppose que la propriété est vraie $\forall\lambda < \delta$.
Démontrons-la pour $\delta$.
  - si $\delta = \gamma + 1$:
  $\alpha^\delta = \alpha^{\gamma+1} = \alpha^\gamma \times \alpha \leqslant \beta^\gamma \times \alpha$ en appliquant l'hypothèse de récurrence et les propriétés du produit ordinal
  Donc,
  $\alpha^\delta = \alpha^{\gamma+1} = \alpha^\gamma \times \alpha \leqslant \beta^\gamma \times \alpha \leqslant \beta^\gamma \times \beta = \beta^{\gamma+1} = \beta^\delta$
  Donc, $\alpha^\delta \leqslant \beta^\delta$.
  - si $\delta$ est un ordinal limite :
  Alors, $\alpha^\delta = \lim_{\lambda<\delta}\alpha^\lambda \leqslant \lim_{\lambda<\delta}\beta^\lambda = \beta^\delta$.

vi. $\boxed{\mu > 1 \Longrightarrow \mu^\alpha \geqslant \alpha}$

- si $\alpha = 0$ alors la propriété est vraie.
- si $\alpha = 1$ alors la propriété est vraie.
- On suppose que la propriété est vraie $\forall\, 1 \leqslant \lambda < \alpha$.
Démontrons-la pour $\alpha$.
  - si $\alpha = \beta + 1$:
  $\mu^\alpha = \mu^{\beta+1} = \mu^\beta \times \mu \geqslant \beta \times \mu \geqslant \beta \times 2 = \beta + \beta \geqslant \beta + 1 = \alpha$
  - si $\alpha$ est un ordinal limite :
  $\mu^\alpha = \lim_{\lambda<\alpha}\mu^\lambda \geqslant \lim_{\lambda<\alpha}\lambda = \alpha$.

**Théorème 63.** *Soient $\beta > 1$ et $\delta > 0$ deux nombres ordinaux.*
*Il existe toujours un nombre $\alpha$ tel que :*
$\beta^\alpha \leqslant \delta < \beta^{\alpha+1}$.

**Démonstration.** En effet, d'après la propriété vi), on a : $\beta^\delta \geqslant \delta$ donc
$\beta^{\delta+1} = \beta^\delta \times \beta \geqslant \delta \times \beta > \delta$
Donc, $\{\mu \leqslant \delta + 1 \colon \beta^\mu > \delta\} \neq \emptyset$.
Soit alors $\eta$ le plus petit élément de cet ensemble. Supposons que $\eta$ soit un nombre ordinal limite.
Alors, $\forall\varepsilon < \eta$, on aurait $\varepsilon + 1 < \eta$ donc $\beta^{\varepsilon+1} \leqslant \delta$ d'après la définition de $\eta$.
Donc, $\beta^\varepsilon < \delta$ et alors : $\beta^\eta = \lim_{\varepsilon<\eta}\beta^\varepsilon \leqslant \delta$ ce qui serait en contradiction avec la définition de $\eta$.
Par conséquent, $\eta$ n'est pas un ordinal limite.
Soit alors $\alpha$ tel que : $\eta = \alpha + 1$.
On obtient alors : $\beta^\alpha \leqslant \delta < \beta^{\alpha+1}$. □

Dans l'exemple de la propriété iii) on a construit la suite $\omega^\omega$, $\omega^{\omega^2}$, $\omega^{\omega^3}$, ..., de type $\omega$. Les exposants forment une suite croissante de limite $\omega^\omega$. Donc la suite elle-même admet $\omega^{(\omega^\omega)} = \omega^{\omega^\omega}$ comme limite.

En continuant ainsi, on obtient la suite croissante $1, \omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \omega^{\omega^{\omega^\omega}}, \ldots$ . On note $\varepsilon_0$ sa limite. La suite $\omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \omega^{\omega^{\omega^\omega}}, \ldots$ , a donc $\omega^{\varepsilon_0}$ comme limite, mais aussi $\varepsilon_0$. Donc $\omega^{\varepsilon_0} = \varepsilon_0$. Cantor a donné la dénomination de *nombre-$\varepsilon$* à toute solution de l'équation $\omega^\varepsilon = \varepsilon$.

**Remarque 64.** Les nombres ordinaux ainsi construits sont tous dénombrables car les limites obtenues sont des réunions dénombrables d'ordinaux dénombrables.

# VIII. Décomposition par l'addition

**Définition 65.** *Soit $\alpha$ un nombre ordinal.*
*Si $\alpha$ peut s'écrire sous la forme $\alpha = \gamma + \rho$, avec $0 < \rho < \alpha$, on dit que $\alpha$ est décomposable par l'addition. $\rho$ s'appelle alors un reste du nombre ordinal $\alpha$.*
*Sinon, $\alpha$ est dit indécomposable.*

**Remarque 66.** Si $\alpha = \gamma + \rho$ avec $0 < \rho < \alpha$, alors d'après la propriété d) de la somme ordinale, $\gamma < \alpha$.

**Exemple 67.**

- $4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 1 + 3$ est décomposable et l'on remarque que le reste n'est pas unique.
  1 est le seul nombre fini indécomposable.
- $\omega \times 2 = \omega + \omega$ est décomposable.
- $\omega$ n'est pas décomposable.
  Supposons au contraire que $\omega$ soit décomposable.
  Alors, $\omega$ s'écrirait $\omega = p + q \in \mathbb{N}$ : absurde.

**Théorème 68.** *Soit $\alpha$ un nombre ordinal décomposable.*
*Alors $\alpha$ admet un nombre fini de restes distincts donc un plus petit reste noté $\rho_0$ et tel que $\rho_0$ est indécomposable.*

**Démonstration.**

- Soit $(\rho_\lambda)_{\lambda<\nu}$ la suite strictement croissante des restes de $\alpha$.
  $\forall \lambda, \exists \gamma_\lambda$ tel que $\alpha = \gamma_\lambda + \rho_\lambda$.
  Si $\lambda_1 < \lambda_2$ alors $\rho_{\lambda_1} < \rho_{\lambda_2}$ et alors $\gamma_{\lambda_1} > \gamma_{\lambda_2}$ d'après la propriété d) de la somme ordinale.
  La suite $(\gamma_\lambda)_{\lambda<\nu}$ est strictement décroissante, elle ne contient donc qu'un nombre fini d'éléments d'après le théorème 32.
  Par conséquent, la suite $(\rho_\lambda)_{\lambda<\nu}$ est finie.
- On note $\rho_0$ le plus petit reste.
  Par l'absurde, supposons que $\rho_0$ est décomposable. Alors, il peut s'écrire :
  $\rho_0 = \delta + \rho$ avec $\rho < \rho_0$. Donc, $\alpha = \gamma + \rho_0 = \gamma + \delta + \rho$ ce qui contredit la minimalité de $\rho_0$. □

**Théorème 69.** *Soit $\rho > 0$ un nombre ordinal.*
*$\rho$ est indécomposable si et seulement si $\forall \varepsilon < \rho, \varepsilon + \rho = \rho$.*

**Démonstration.** Soit $\rho > 0$ un nombre ordinal indécomposable et soit $\varepsilon < \rho$.
Alors, $\exists \delta > 0$ tel que $\rho = \varepsilon + \delta$ avec $\delta \leqslant \rho$.
Or, $\rho$ est indécomposable donc $\delta \geqslant \rho$ donc $\delta = \rho$.
Réciproquement, on suppose que $\forall \varepsilon < \rho, \varepsilon + \rho = \rho$.
Par l'absurde, supposons que $\rho = \gamma + \varepsilon$ avec $\varepsilon < \rho$ et $\gamma < \varepsilon$.
Alors, $\rho + \rho = \gamma + \varepsilon + \rho = \gamma + \rho = \rho$, ce qui est absurde. □

**Théorème 70.** *Tout nombre ordinal $\alpha > 0$ s'écrit de façon unique sous la forme :*

*$\alpha = \rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_n$ où $\rho_1 \geqslant \rho_2 \geqslant \ldots \geqslant \rho_n$ sont des nombres ordinaux indécomposables et*

- *$\rho_n$ est le plus petit reste de $\alpha$*
- *$\rho_1$ est le plus grand nombre ordinal indécomposable tel que $\rho_n \leqslant \alpha$.*

**Démonstration.**
Existence : si $\alpha$ est indécomposable, il n'y a rien à démontrer.
Sinon, $\alpha$ est décomposable. Soit alors $\varepsilon_1$ son plus petit reste et $\alpha = \gamma_1 + \varepsilon_1$.
Si $\gamma_1$ est indécomposable, c'est fini.
Sinon, soit $\varepsilon_2$ son plus petit reste.
Alors, $\gamma_1 = \gamma_2 + \varepsilon_2$.
Le processus se poursuit tant que les $\gamma_i$ sont décomposables et alors $\gamma_i = \gamma_{i+1} + \varepsilon_{i+1}$.
On a : si $\varepsilon_i > 0$ alors $\gamma_{i+1} < \gamma_i$.
La suite $(\gamma_i)_i$ est strictement décroissante donc finie. Alors, il existe $\gamma_{i_0}$ tel que $\gamma_{i_0} = \varepsilon_{i_0+1}$ est indécomposable.
Alors, $\gamma_{i_0-1} = \varepsilon_{i_o+1} + \varepsilon_{i_0}$ et par suite $\alpha = \varepsilon_{i_o+1} + \varepsilon_{i_0} + \ldots + \varepsilon_1$ avec $(\varepsilon_i)_{i \leqslant i_0+1}$ une suite de nombres ordinaux indécomposables.
Soit $j_1 \geqslant 1$ le plus petit indice tel que $\varepsilon_{j_1} \geqslant \varepsilon_1$.
D'après le théorème précédent, $\alpha = \varepsilon_{i_o+1} + \varepsilon_{i_0} + \ldots + \varepsilon_{j_1} + \varepsilon_1$.
De même, soit $j_2$ le plus petit indice tel que $\varepsilon_{j_2} \geqslant \varepsilon_{j_1}$.
Alors, $\alpha = \varepsilon_{i_o+1} + \varepsilon_{i_0} + \ldots + \varepsilon_{j_2} + \varepsilon_{j_1} + \varepsilon_1$.
Après un nombre fini d'étapes, on obtient :
$\alpha = \varepsilon_{j_n} + \varepsilon_{j_{n-1}} + \ldots + \varepsilon_{j_2} + \varepsilon_{j_1} + \varepsilon_1$ avec $\varepsilon_{j_n} \geqslant \varepsilon_{j_{n-1}} \geqslant \ldots \geqslant \varepsilon_{j_1} \geqslant \varepsilon_1$.

**Remarque 71.** Soit $\alpha = \rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_n$ une décomposition.
Alors, $\rho_1$ est le plus grand nombre indécomposable tel que $\rho_1 \leqslant \alpha$.
En effet, si l'on suppose qu'il existe $\rho$ indécomposable tel que $\rho_1 < \rho \leqslant \alpha$, on a alors :
$\alpha + \rho = (\rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_n) + \rho = \rho$ car $\rho > \rho_1 \geqslant \rho_2 \geqslant \ldots \geqslant \rho_n$ et alors $\alpha < \rho$ ce qui est une contradiction.

Unicité: soit $\alpha = \rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_n = \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_m$.
avec $\rho_1 \geqslant \rho_2 \geqslant \ldots \geqslant \rho_n$ et $\nu_1 \geqslant \nu_2 \geqslant \ldots \geqslant \nu_m$ des nombres indécomposables.
Sans perte de généralité, on peut supposer que $n \leqslant m$. Par la remarque précédente, on a forcément $\rho_1 = \nu_1$, mais alors $\rho_2 + \ldots + \rho_n = \nu_2 + \ldots + \nu_m$ avec $\rho_2 \geqslant \ldots \geqslant \rho_n$ et $\nu_2 \geqslant \ldots \geqslant \nu_m$.
De même, $\rho_2 = \nu_2$.
Par suite, pour tout $i \in \{1 \ldots n\}$, $\rho_i = \nu_i$.
Si $n < m$, on aurait $0 = \nu_{n+1} + \ldots + \nu_m > 0$ ce qui est impossible donc $n = m$. □

**Théorème 72.** *Soit $\mu > 0$ , $\rho > 1$ un nombre ordinal indécomposable.
Alors, $\mu \times \rho$ est un nombre ordinal indécomposable et le plus petit nombre ordinal indécomposable strictement plus grand que $\mu$ est $\mu \times \omega$.*

**Démonstration.** D'après le théorème 69, pour montrer que $\mu \times \rho$ est un nombre ordinal indécomposable, il suffit de montrer que $\forall \varepsilon < \mu \times \rho$, $\varepsilon + \mu \times \rho = \mu \times \rho$.
Soit $\varepsilon < \mu \times \rho$.
On sait qu'il existe un unique couple $(\eta, \gamma)$ tel que $\varepsilon = \mu \times \eta + \gamma$ avec $\gamma < \mu$.
D'où, $\varepsilon + \mu \times \rho = \mu \times \eta + \gamma + \mu \times \rho \leqslant \mu \times (\eta + 1 + \rho) = \mu \times (\eta + \rho)$.
Or, $\mu \times \eta \leqslant \varepsilon < \mu \times \rho$ donc $\eta < \rho$ et alors $\eta + \rho = \rho$.
Finalement, $\varepsilon + \mu \times \rho \leqslant \mu \times \rho$.
De plus, on voit facilement que $\mu \times \rho \leqslant \varepsilon + \mu \times \rho$ d'où l'égalité.
Soit $\nu$ tel que $0 < \mu < \nu < \mu \times \omega$.
Il existe un unique couple $(\alpha, \beta)$ tel que $\nu = \mu \times \alpha + \beta$ avec $\beta < \mu$

- si $\beta > 0$ alors $\nu$ est décomposable
- sinon, $\nu = \mu \times \alpha$, alors $\mu \times \alpha < \mu \times \omega$ donc $0 < \alpha < \omega$ c'est à dire que $\alpha \geqslant 1$.
  Alors, $\nu = \mu \times (\alpha - 1) + \mu$ avec $\mu < \nu$ donc $\nu$ est décomposable. □

**Théorème 73.** *Les seuls nombres indécomposables par l'addition sont les nombres $\omega^\alpha$, $\alpha \geqslant 0$.*

**Démonstration.**

- Montrons que $\forall \alpha \geqslant 0$, $\omega^\alpha$ est indécomposable. On raisonne par récurrence transfinie sur $\alpha$.
  - si $\alpha = 0$ : la propriété est vraie
  - si $\alpha = 1$ : la propriété est vraie
  - On suppose que la propriété est vraie pour tout $\beta < \alpha$.
    Démontrons-la pour $\alpha$.
    a) si $\alpha = \lambda + 1$ alors par l'hypothèse de récurrence, $\omega^\lambda$ est indécomposable et d'après le théorème précédent, $\omega^\lambda \times \omega = \omega^{\lambda+1} = \omega^\alpha$ l'est aussi.
    b) si $\alpha$ est un ordinal limite alors $\omega^\alpha = \lim_{\lambda < \alpha} \omega^\lambda$.
    Soit $\rho$ le plus grand nombre indécomposable tel que $\rho \leqslant \omega^\alpha$ (il existe d'après le théorème 70).
    Or, $\forall \lambda < \alpha, \omega^\lambda < \omega^\alpha$ et $\omega^\lambda$ est indécomposable d'après l'hypothèse de récurrence, donc, $\forall \lambda < \alpha, \omega^\lambda \leqslant \rho$.
    Finalement, $\omega^\alpha = \rho$.
- Soit $\rho$ un nombre indécomposable. D'après le théorème 63,
  $\exists \alpha$ tel que $\omega^\alpha \leqslant \rho < \omega^{\alpha+1}$.
  D'après le théorème précédent, $\omega^\alpha \times \omega = \omega^{\alpha+1}$ est le plus petit nombre ordinal indécomposable strictement plus grand que $\omega^\alpha$ donc $\rho = \omega^\alpha$.

□

**Corollaire 74.** *Soient $\alpha$ et $\beta$ deux nombres ordinaux.*
*Soit $\gamma$ un nombre indécomposable tel que $\gamma$ soit à la fois inférieur ou égal au plus petit reste de $\alpha$ et au plus petit reste de $\beta$.*
*Alors, si $\alpha + \gamma = \beta + \gamma$, on obtient $\alpha = \beta$ par unicité de la décomposition.*

# IX. Applications de la théorie des nombres ordinaux

## 1. Le théorème de Cantor-Bendixson

**Définition 75.** *On appelle ensemble dérivé M' d'un ensemble M l'ensemble de ses points d'accumulation.*

**Définition 76.** *M est dense en soi si $M \neq \emptyset$ et si $M \subseteq M'$.*

**Définition 77.** *M est parfait si $M \neq \emptyset$ et M'=M.*

**Théorème 78.** *Cantor-Bendixson : Tout fermé de $\mathbb{R}$ est la réunion de deux ensembles disjoints : l'un parfait, l'autre dénombrable.*

Nous allons donner quelques résultats nécessaires à la démonstration de ce théorème.

**Proposition 79.** *M est fermé si et seulement si $M' \subseteq M$.*

**Démonstration.** Évidente d'après la définition même d'un ensemble fermé. □

Dans la suite, on suppose que $M$ est fermé.
On définit par induction transfinie les ensembles dérivés d'ordre $\gamma$ quelconque par :

- si $\gamma = \beta + 1$, $M^\gamma = (M^\beta)'$
- si $\gamma$ est un ordinal limite, $M^\gamma = \bigcap_{\beta < \gamma} M^\beta$.

Par convention, on note $M^0 = M$.

**Proposition 80.** $\forall\ \gamma$, *on a :* $M^{\gamma} \supseteq M^{\gamma+1}$ *(c'est à dire :* $M^{\gamma}$ *est fermé).*

**Démonstration.** On raisonne par induction transfinie.
$* \gamma = 0$ : vrai car $M$ est fermé.
$* \gamma = 1$ : Montrons alors que $M'' \subseteq M'$.
Soit $x \in M''$.
$\forall V \in \mathcal{V}(x)$, on a $V \cap M' \backslash \{x\} \neq \emptyset$. Or, $M$ est fermé donc $M' \subseteq M$.
Par conséquent, $\forall V\ \in \mathcal{V}(x)$ , $V \cap M \backslash \{x\} \neq \emptyset$. Donc, $x \in M'$.
Nous venons de montrer que si $M$ est fermé alors $M'$ est fermé (1).
$*$ On suppose que $\forall \beta < \gamma, M^{\beta} \supseteq M^{\beta+1}$. Montrons-le à l'ordre $\gamma$.
$\bullet$ si $\gamma = \beta+1$: alors $M^{\beta} \supseteq M^{\beta+1}$ d'après l'hypothèse d'induction transfinie.
Donc, $M^{\beta}$ est fermé.
D'après (1), $M^{\beta+1}$ est fermé. Donc, $M^{\beta+1} \supseteq M^{\beta+1+1}$ c'est à dire que $M^{\gamma} \supseteq M^{\gamma+1}$.
$\bullet$ si $\gamma$ est un ordinal limite : $M^{\gamma} = \bigcap_{\beta < \gamma} M^{\beta}$.
Or, $\forall \beta < \gamma, M^{\beta}$ est un fermé et l'intersection de fermés est un fermé.
Donc, $M^{\gamma}$ est un fermé, c'est à dire : $M^{\gamma} \supseteq M^{\gamma+1}$.

□

**Théorème 81.** *Pour tout ensemble fermé M, il existe un nombre ordinal* $\gamma$ *fini ou dénombrable tel que* $M^{\gamma}$ *est vide ou parfait.*

**Démonstration.** D'après la proposition précédente, la suite $(M^{\gamma})_{\gamma}$ des dérivées successives de $M$ est décroissante.
Montrons qu'elle est stationnaire, c'est à dire qu'il existe $\gamma$ tel que $M^{\gamma} = (M^{\gamma})' = M^{\gamma+1}$.
Par l'absurde, supposons que $\forall\ \gamma$, $\ldots \subsetneq M^{\gamma+2} \subsetneq M^{\gamma+1} \subsetneq M^{\gamma} \subsetneq \ldots \subsetneq M_0$.
On construit la suite $(x_{\gamma})_{\gamma}$ définie par :

- $x_0\ \in M \backslash M'$
- $x_1\ \in M' \backslash M'' \ldots$
- $x_{\gamma}\ \in\ M^{\gamma} \backslash M^{\gamma+1} \ldots$

$(x_{\gamma})_{\gamma}$ est une suite d'éléments distincts de $M$.
Soit $\xi = \mathrm{card}(M)$, soit $\theta > \xi$ et $\delta$ un ordinal de $\mathrm{card}(\theta)$.
Alors, $(x_{\gamma})_{\gamma < \delta}\ \subseteq M\ \Longrightarrow \mathrm{card}(\{x_{\gamma} : \gamma < \delta\})\ \leqslant \mathrm{card}(M)$.
Comme l'application $: \delta \longrightarrow \{x_{\gamma}\ : \gamma < \delta\}$ est bijective .
$\qquad\qquad\qquad\qquad \beta \longmapsto x_{\beta}$
Alors, $\mathrm{card}(\{x_{\gamma}\ : \gamma < \delta\})\ = \mathrm{card}\,(\delta) = \theta$.
Donc, $\theta \leqslant \xi$ : absurde.
Par conséquent, la suite $(M^{\gamma})_{\gamma}$ des dérivées successives de $M$ est stationnaire, donc soit $M^{\gamma} = \emptyset$ soit $M^{\gamma}$ est parfait.
Soit $\gamma$ le plus petit ordinal tel que $M^{\gamma} = M^{\gamma+1}$.
Montrons à présent que $\gamma$ est fini ou dénombrable.
$\mathbb{R}$ étant un espace métrique séparable, soit alors $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une base dénombrable d'ouverts.
$\forall \beta < \gamma$, $\exists\ x_{\beta} \in M^{\beta} \backslash M^{\beta+1}\ \Rightarrow x_{\beta} \in M^{\beta}$ et $x_{\beta} \in (M^{\beta+1})^c$.
Or, $M^{\beta+1}$ est un fermé donc $(M^{\beta+1})^c$ est un ouvert.
Par conséquent, $\exists\ n(\beta) \in \mathbb{N}$ tel que $x_{\beta}\ \in U_{n(\beta)} \subset (M^{\beta+1})^c$.
On définit ainsi l'application $\varphi : \gamma \longrightarrow \mathbb{N}$
$\qquad\qquad\qquad\qquad \beta \longmapsto n(\beta)$ et nous allons montrer par la suite qu'elle est injective.
On a :

- $U_{n(\beta)} \cap M^{\beta+1} = \emptyset$
- $U_{n(\beta)} \cap M^{\beta} \neq \emptyset$ car $x_{\beta}\ \in\ U_{n(\beta)} \cap M^{\beta}$

Soit $\alpha < \beta\ \ (\alpha + 1 \leqslant \beta)$, alors $M^{\beta} \subset\ M^{\alpha+1}$ et $\ U_{n(\beta)} \cap M^{\beta} \neq \emptyset$ , donc $U_{n(\beta)} \cap M^{\alpha+1} \neq \emptyset$ .

Comme $U_{n(\alpha)} \cap M^{\alpha+1} = \emptyset$ alors $U_{n(\beta)} \neq U_{n(\alpha)}$ c'est à dire $n(\beta) \neq n(\alpha)$.
Donc, $\varphi$ est injective d'où $\text{card}(\gamma) \leqslant \text{card}(\mathbb{N})$.
Donc, $\gamma$ est fini ou dénombrable

□

**Démonstration.** (Théorème de Cantor-Bendixson)
Soit $M$ un fermé non vide de $\mathbb{R}$.
Si $M$ est parfait ou dénombrable, il n'y a rien à démontrer.
Supposons alors que $M$ n'est ni parfait ni dénombrable.
D'après le théorème 81, il existe un ordinal $\gamma$ fini ou dénombrable tel que $M^\gamma$ est vide ou parfait. On prend $\gamma$ le plus petit des ordinaux vérifiant cette propriété.
Si $M^\gamma$ est vide : $M \supsetneq M' \supsetneq \ldots \supsetneq M^\gamma = \emptyset$
$M = \bigcup_{\beta<\gamma} (M^\beta \backslash M^{\beta+1})$
D'après le lemme sur les points isolés (cf annexe), $M^\beta \backslash M^{\beta+1}$ est dénombrable.
$\gamma$ étant dénombrable, on obtient que $M$ est dénombrable (car c'est une union dénombrable d'ensembles dénombrables) : absurde donc $M^\gamma$ est parfait, donc $M^\gamma = M^{\gamma+1}$.
Alors, $M = M^\gamma \cup (\bigcup_{\beta<\gamma} M^\beta \backslash M^{\beta+1})$ avec $M^\gamma$ parfait et $\bigcup_{\beta<\gamma} M^\beta \backslash M^{\beta+1}$ dénombrable.
Il est évident par construction que $M^\gamma \cap (\bigcup_{\beta<\gamma} M^\beta \backslash M^{\beta+1}) = \emptyset$. □

## 2. La construction des boréliens

D'une façon générale, il n'est pas aisé de décrire la tribu engendrée par une famille. En effet, on ne peut pas l'obtenir par des opérations finies (d'union, d'intersection et de complémentation) sur les éléments de cette famille. Par contre, la théorie des ordinaux permet cette construction "de l'intérieur". Dans ce paragraphe, nous nous intéresserons en particulier à la tribu borélienne, fondamentale en théorie de la mesure.

**Définition 82.** *Soit $(E, \tau)$ un espace topologique.*
*La tribu borélienne de $(E, \tau)$, notée $\mathcal{B}(E, \tau)$, est la tribu engendrée par $\tau$. C'est donc la plus petite famille vérifiant:*

*i.* $\tau \subset \mathcal{B}(E, \tau)$

*ii.* $\forall B \in \mathcal{B}(E, \tau), B^c \in \mathcal{B}(E, \tau)$ *(stabilité par passage au complémentaire)*

*iii.* $\forall (B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}(E, \tau)$, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{B}(E, \tau)$ *(stabilité par union dénombrable)*

*la condition iii. pouvant être remplacée par:*

*iv.* $\forall (B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}(E, \tau)$, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{B}(E, \tau)$ *(stabilité par intersection dénombrable)*

Dans la suite, on supposera que $E$ est un espace métrique.
On rappelle que tout ordinal s'écrit de façon unique sous la forme $\lambda + n$ où $\lambda$ est un nombre limite et $n \in \mathbb{N}$. Le nombre ordinal $\lambda + n$ est dit pair (resp. impair) si $n$ est pair (resp. impair), les nombres limites étant considérés comme pairs.
Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$. On note $\mathcal{C}_\delta$ (resp. $\mathcal{C}_\sigma$) l'ensemble des intersections (resp. réunions) dénombrables d'éléments de $\mathcal{C}$.
Pour tout ordinal $\gamma$, on définit par induction transfinie les ensembles $\mathcal{C}_\gamma$ par:

- $\mathcal{C}_0 = \tau$
- Si $\gamma$ impair, $\mathcal{C}_\gamma = (\bigcup_{\beta<\gamma} \mathcal{C}_\beta)_\delta$
- Si $\gamma$ pair, $\mathcal{C}_\gamma = (\bigcup_{\beta<\gamma} \mathcal{C}_\beta)_\sigma$

**Théorème 83.** *$\mathcal{B}(E,\tau) = \bigcup_{\gamma<\omega_1} \mathcal{C}_\gamma$ où $\omega_1$ est le plus petit ordinal non dénombrable.*

**Démonstration.** $\bigcup_{\gamma<\omega_1} \mathcal{C}_\gamma$ est une tribu.
En effet:

i. $\tau = \mathcal{C}_0 \subset \bigcup_{\gamma<\omega_1} \mathcal{C}_\gamma$ donc $\bigcup_{\gamma<\omega_1} \mathcal{C}_\gamma \neq \emptyset$.

ii. (Stabilité par passage au complémentaire).
Soit $B \in \mathcal{C}_\gamma$. Montrons par induction transfinie $B^c \in \mathcal{C}_{\gamma+1}$.

  - Si $\gamma = 0$, $B \in \tau$ donc $B^c$ est un fermé et peut s'écrire comme une intersection dénombrable d'ouverts (voir démonstration en annexe), c'est-à-dire d'éléments de $\tau$ . Donc $B^c \in \mathcal{C}_1$.

  - On suppose vrai pour tout $\beta < \gamma$. Montrons le pour $\gamma$.
  Soit $B \in \mathcal{C}_\gamma$. Si $\gamma$ pair (resp. impair), $B$ est une réunion (resp. intersection) dénombrable d'éléments de $\bigcup_{\beta<\gamma} \mathcal{C}_\beta$. Par hypothèse d'induction, $B^c$ est une intersection (resp. réunion) dénombrable d'éléments de $\bigcup_{\beta<\gamma} \mathcal{C}_{\beta+1} = \bigcup_{\beta<\gamma+1} \mathcal{C}_\beta$ c'est à dire que $B^c \in \mathcal{C}_{\gamma+1}$.

iii. (Stabilité par réunion dénombrable)
Soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dénombrable de $\bigcup_{\gamma<\omega_1} \mathcal{C}_\gamma$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un ordinal $\beta_n < \omega_1$ tel que $B_n \in \mathcal{C}_{\beta_n}$. $(\beta_n)_{n<\omega}$ étant une suite de $\omega_1$, elle est bornée dans $\omega_1$. En effet, pour tout $n < \omega$ considérons les ensembles $A_n$ disjoints deux à deux tels que $\beta_n = \mathrm{ord}(A_n)$.
Par définition, $\sum_{n<\omega} \beta_n = \mathrm{ord}(\bigcup_{n<\omega} A_n)$.
Or, $\bigcup_{n<\omega} A_n$ est dénombrable en tant que réunion dénombrable d'ensembles dénombrables.
Donc, $\gamma = \sum_{n<\omega} \beta_n \in \omega_1$. De plus, $\forall n < \omega$, $\beta_n \leqslant \gamma$.
Alors, $\forall n \in \mathbb{N}, B_n$ est contenu dans $\mathcal{C}_\gamma$.
Quitte à considérer $\gamma + 1$, on peut toujours supposer $\gamma$ impair. Ainsi, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{C}_{\gamma+1}$ .

$\bigcup_{\gamma<\omega_1} \mathcal{C}_\gamma$ est donc une tribu contenant $\tau$. Par définition de $\mathcal{B}(E,\tau)$,
$\mathcal{B}(E,\tau) \subset \bigcup_{\gamma<\omega_1} \mathcal{C}_\gamma$ .
Réciproquement, on montre facilement par induction transfinie que pour tout $\gamma < \omega_1$, $\mathcal{C}_\gamma \subset \mathcal{B}(E,\tau)$ et donc l'inclusion inverse. □

## 3. L'Hydre de Lerne

### Contexte mythologique

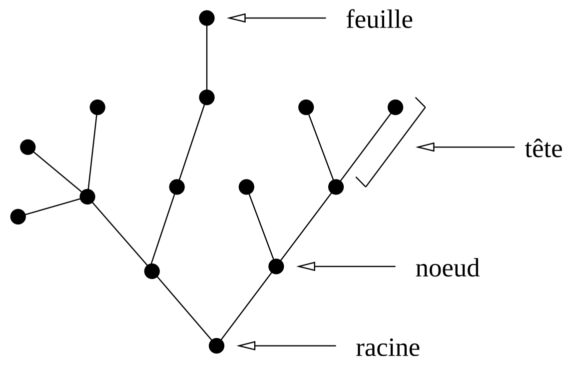
Afin de se purifier du meurtre de sa femme et de ses trois fils, Hercule doit accomplir douze travaux. Parmi ceux-ci, il doit couper les têtes d'une hydre. L'hydre a la possibilité de se régénérer de façon de plus en plus forte à chaque fois qu'une tête est coupée. Sachant qu'Hercule est l'homme le plus fort de la terre et supposant qu'il est immortel, pourra-t-il les couper toutes?

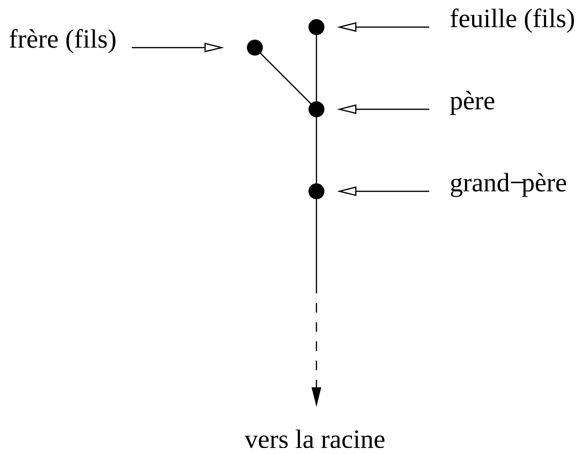
On désire modéliser mathématiquement la bataille avec l'hydre.

### Modélisation

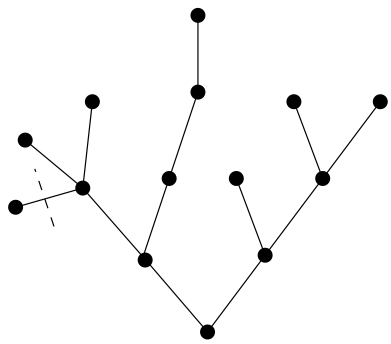
Une hydre est un arbre fini, qui est un ensemble d'arcs joignant chacun deux noeuds, de sorte que chaque noeud est connecté par un chemin unique d'arcs à un noeud fixe appelé *racine*. Une feuille de l'arbre est un noeud avec un seul arc (et qui n'est pas la racine). Une tête de l'hydre est une feuille de l'arbre avec son arc.

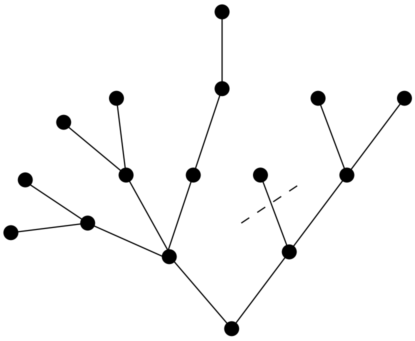
**Exemple 84.**



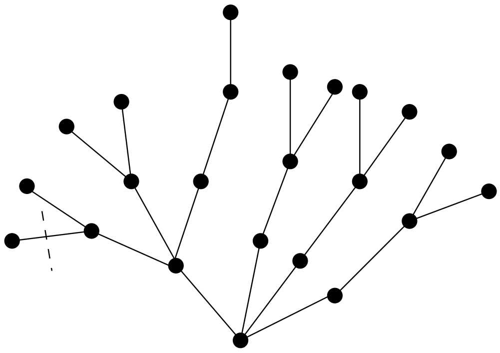




Un combat entre Hercule et une hydre donnée se déroule de la façon suivante: à l'étape $n$ ($n \geqslant 1$), Hercule coupe une tête de l'hydre. A partir du grand père de la feuille coupée, repoussent $n$ répliques de la branche restante.
Par exemple, un combat peut commencer de la façon suivante :

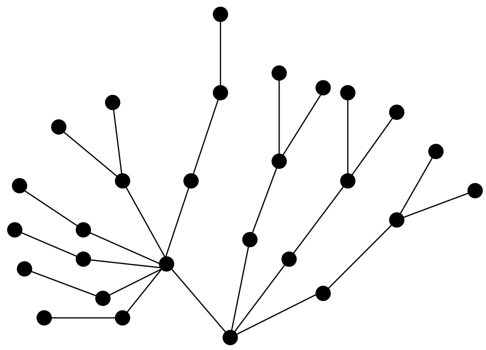




Après l'étape 1



Après l'étape 2



Après l'étape 3

Si la feuille coupée avait la racine comme père, aucune feuille ne repousse. Hercule gagne si après un nombre fini d'étapes, il ne reste que la racine.

**Définition 85.** *Une stratégie est une fonction qui indique à Hercule quelle tête couper à une certaine étape d'un certain combat. Une stratégie est dite gagnante si elle assure la victoire d'Hercule pour toute hydre donnée.*

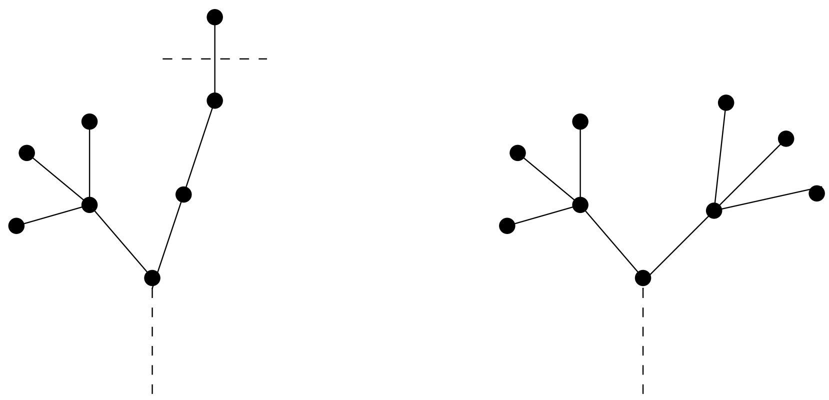
On a le résultat surprenant :

**Théorème 86.** *Toute stratégie est gagnante.*

**Remarque 87.** Ce résultat peut paraître moins étonnant si l'on tient compte des remarques suivantes :

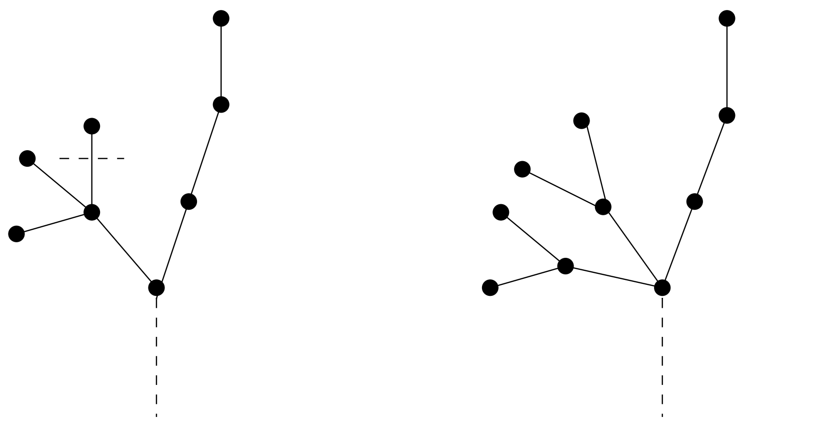
1. Si la feuille coupée n'a pas de frère : la "hauteur" de la branche coupée diminue.

   Exemple à l'étape 2:



2. Si la feuille coupée avait $k$ ($k \geqslant 1$) frères : elle et ses répliques n'en ont plus que $k-1$.

   Exemple à l'étape 1 :



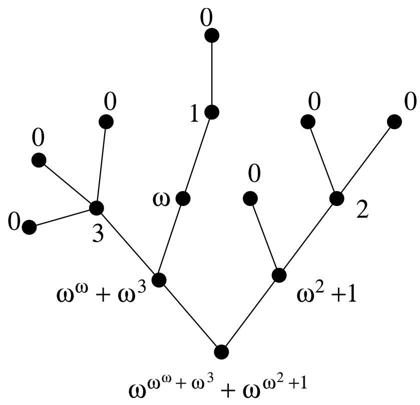
Après repousse

**Ordinal d'une hydre**

A chaque noeud de l'hydre, on va affecter un nombre ordinal inférieur à $\varepsilon_0$ de la manière suivante :

- A chaque feuille, on associe 0.
- A tout autre noeud, on affecte l'ordinal $\gamma = \omega^{\alpha_1} + \ldots + \omega^{\alpha_l}$ où $\alpha_1 \geqslant \ldots . \geqslant \alpha_l$ sont les ordinaux de ses fils ($\omega^{\alpha_1} + \ldots + \omega^{\alpha_l}$ est la décomposition par l'addition de $\gamma$).

**Exemple 88.**




L'ordinal de l'hydre est l'ordinal attribué à sa racine.

**Définition 89.** *Pour toute stratégie $\sigma$, on peut définir une opération $[.]_\sigma(n)$ qui à l'ordinal $\alpha$ de l'hydre à l'étape $n-1$ associe l'ordinal $[\alpha]_\sigma(n)$de l'hydre à l'étape $n$, où $\sigma$ est la "stratégie utilisée".*

**Théorème 90.** *Pour toute stratégie $\sigma$, pour tout ordinal $0<\alpha<\varepsilon_0$, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 1$, $[\alpha]_\sigma(n)<\alpha$.*

**Démonstration.**
Soit $\gamma$ l'ordinal du grand père de la feuille coupée à l'étape $n$.

$\gamma = w^{\gamma_1}\times k_1 + \omega^{\gamma_2}\times k_2 + ... + \omega^{\gamma_{i_0}}\times k_{i_0} + ... + \omega^{\gamma_l}\times k_l$ avec $\gamma_1>\gamma_2>...>\gamma_l$,
$k_1, k_2, ..., k_l\in\mathbb{N}$, $\gamma_{i_0}$ l'ordinal du père de la feuille coupée.
Donc, il existe $\beta$ tel que $\gamma_{i_0}=\beta+1$ $(\beta\geqslant\gamma_{i_o+1})$.
Après repousse, l'ordinal du grand-père devient :
$\gamma' = w^{\gamma_1}\times k_1 + ... + \omega^{\gamma_{i_0}}\times(k_{i_0}-1) + \omega^\beta\times(n+1) + ... + \omega^{\gamma_l}\times k_l$.
Comme $n+1<\omega$, on a $\omega^\beta\times(n+1)<\omega^\beta\times\omega\,(=\omega^{\gamma_{i_0}})$ et donc
$w^{\gamma_1}\times k_1 + ... + \omega^{\gamma_{i_0}}\times(k_{i_0}-1) + \omega^\beta\times(n+1) < w^{\gamma_1}\times k_1 + ... + \omega^{\gamma_{i_0}}\times k_{i_0}$.
Comme $\omega^{\gamma_{i_0+1}}$ est inférieur ou égal au plus petit reste de chacun des deux membres de l'inégalité, on a alors :
$$w^{\gamma_1}\times k_1 + ... + \omega^{\gamma_{i_0}}\times(k_{i_0}-1) + \omega^\beta\times(n+1) + \omega^{\gamma_{i_0+1}} < w^{\gamma_1}\times k_1 + ... + \omega^{\gamma_{i_0}}\times k_{i_0} + \omega^{\gamma_{i_0+1}}$$
Par le même argument répété $k_{i_0+1}$ fois, on montre que :
$$w^{\gamma_1}\times k_1 + ... + \omega^{\gamma_{i_0}}\times(k_{i_0}-1) + \omega^\beta\times(n+1) + \omega^{\gamma_{i_0+1}}\times k_{i_0+1} < w^{\gamma_1}\times k_1 + ... + \omega^{\gamma_{i_0}}\times k_{i_0} + \omega^{\gamma_{i_0+1}}\times k_{i_0+1}$$
On continue ainsi de suite pour les termes restants et on aboutit à $\gamma'<\gamma$.
Si $\gamma=\alpha$ (c'est à dire le grand-père était la racine) on a le résultat cherché. Sinon,
$\omega^{\gamma'}<\omega^\gamma$ et par un raisonnement similaire au précédent, on remonte à la racine et finalement $[\alpha]_\sigma(n)<\alpha$. □

**Démonstration.** du théorème 86 :
Soit $\sigma$ une stratégie quelconque et $\alpha$ l'ordinal d'une hydre donnée. D'après le théorème précédent: $\alpha>[\alpha]_\sigma(1)>[[\alpha]_\sigma(1)]_\sigma(2)>...$
Si on note $\alpha_i$ l'ordinal de l'hydre à l'étape $i$ la suite $(\alpha_i)$ est strictement décroissante donc stationnaire à partir d'un certain rang $n\in\mathbb{N}$. Ce qui veut dire qu'à la $n$-ième étape, plus rien ne repousse : Hercule a atteint la racine. □

# X. Annexes

**Lemme 91.** *L'ensemble des points isolés d'un ensemble $M \subset \mathbb{R}$ est au plus dénombrable.*

**Démonstration.** Soit $x \in M$ un point isolé, c'est à dire $x \in M \backslash M'$.
Par définition, $\exists V \in \mathcal{V}(x)$, que l'on peut supposer ouvert, sans perte de généralité, tel que $V \cap M = \{x\}$.
$\exists n(x) \in \mathbb{N}$ tel que $x \in U_{n(x)} \subset V$.
Ainsi, on définit l'application : $\psi: M \backslash M' \longrightarrow \mathbb{N}$
$x \longmapsto n(x)$
Montrons que $\psi$ est injective.
Soit $x_1 \neq x_2$ : montrons que $\psi(x_1) \neq \psi(x_2)$.
On a : $U_{n(x_1)} \cap M = \{x_1\}$
$U_{n(x_2)} \cap M = \{x_2\}$
Donc, $U_{n(x_1)} \neq U_{n(x_2)}$ donc $n(x_1) \neq n(x_2)$ d'où $\psi(x_1) \neq \psi(x_2)$.
Donc, $\psi$ est injective et $\mathrm{card}(M \backslash M') \leqslant \mathrm{card}(\mathbb{N})$, d'où le résultat. □

**Lemme 92.** *Soit $(X,d)$ un espace métrique, $T_d$ la topologie associée à d.*
*Alors, tout ouvert de $(X, T_d)$ est égal à une réunion dénombrable de fermés.*

**Démonstration.** Soit $U \in \mathrm{T}_d$.
$x \in U \Longleftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subset U$
$\Longleftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^* : B(x, \frac{1}{n}) \subset U$
$\Longleftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^* : \forall y \notin U, d(x, y) \geqslant \frac{1}{n}$
$\Longleftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^* : \forall y \in U^c, x \in B^c(y, \frac{1}{n})$
Donc, $U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \bigcap_{y \in U^c} B^c(y, \frac{1}{n})$.
Puis : par passage au complémentaire, tout fermé est une intersection dénombrable d'ouverts. □

# XI. Bibliographie


- CANTOR, Georg. 1989. *Sur les Fondements de la Théorie des Ensembles Transfinis.* Sceaux : Éditions Jacques Gabay, 94p.
- KAMKE, Erich. 1993. *Théorie des Ensembles.* Sceaux : Éditions Jacques Gabay, 228p.
- KIRBY, L., PARIS, J..1982. *Bull. London Math. Soc.* : "Accessible independence results for peano arithmetic".
- KRIVINE, J.L.. 1998. *Théorie des Ensembles.* Paris : Cassini, 273p.
- KURATOWSKI, C.. 1992. *Topologie, I et II.* Sceaux : Éditions Jacques Gabay, 528p.
- KURATOWSKI, C.. 1966. *Introduction à la Théorie des Ensembles et à la Topologie.* Genève : Imprimerie Albert KUNDIG, 305p.
- http://www-math.unice.fr/~lemaire/Cours01-02/OrdCard.pdf
- http://www.reunion.iufm.fr/recherche/irem/histoire/Cinfinimath%E9matiques.htm
- http://hypo.ge-dip.etat-ge.ch/www/math/html/node14.html